О ЛОКАЛЬНО-СБАЛАНСИРОВАННЫХ 2-РАЗБИЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

Баликян С.В.

В работе получено необходимое и достаточное условие существования такого разбиения множества вершин двудольного графа G, в котором любые два простых цикла имеют не более одной общей вершины, на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2, при котором для любой вершины $v \in V(G)$ выполняется неравенство $||\lambda(v) \cap V_1| - |\lambda(v) \cap V_2|| \leq 1$, где $\lambda(v)$ есть множество вершин, смежных вершине v.

В работе рассматриваются неориентированные графы без кратных ребер и петель. Множество вершин графа G обозначается через $V(G)$, множество ребер – через $E(G)$. Степень вершины $v \in V(G)$ в графе G обозначается через $d_G(v)$. Для вершины $v \in V(G)$ определим множество $\lambda(\nu) \equiv \{\omega \in V(G)/(\omega, \nu) \in E(G)\}$.

2-разбиением графа G называется функция $f : V(G) \to \{0,1\}$.

2-разбиение f графа G называется локально-сбалансированным, если для любой вершины $v \in V(G)$

$$||\{\omega \in \lambda(\nu)/f(\omega) = 1\}| - |\{\omega \in \lambda(\nu)/f(\omega) = 0\}|| \leq 1.$$

Некоторые исследования задач о существовании локально-сбалансированных 2-разбиений графов проведены в [1, 2, 3].

Для любой функции $g : X_g \to \{0,1\}$ и любого множества $X \subseteq X_g$ положим:

$$P(X,g) \equiv |\{\nu \in X/g(\nu) = 1\}| - |\{\nu \in X/g(\nu) = 0\}|.$$

Множество всех простых циклов графа G обозначим через $T(G)$. Будем полагать, по определению, что в простом цикле повторяющихся ребер нет. Множество вершин простого цикла C графа G обозначим через $V_G(C)$. Положим:

$$V_G^c(S) \equiv \bigcup_{C \in S} V_G(C), \text{где } S \text{ есть произвольное подмножество множества } T(G).$$

Положим $L(G) = V(G) \backslash V_G^c(T(G))$.

Для $\forall u \in V(G)$ положим $L_G(u) \equiv \lambda(u) \cap L(G)$.

Через $V_2(G)$ обозначим подмножество вершин графа G, принадлежащих хотя бы двум простым циклам графа G.

Для $\forall x \in V(G)$ через $C_G(x)$ обозначим множество всех простых циклов графа G, которые проходят через вершину x.

Пусть G произвольный граф, а $V_0 \subseteq V(G)$ – некоторое подмножество его вершин. Определим граф $<V_0>_G$ следующим образом:

$$V(<V_0>_G) \equiv V_0, \quad E(<V_0>_G) \equiv \{(v_1, v_2) \in E(G)/v_1 \in V_0, v_2 \in V_0\}.$$

Пусть A – множество графов, в которых любые два простых цикла имеют не более одной общей вершины.

Целью работы является установление необходимого и достаточного условия существования локально-сбалансированного 2-разбиения для графов класса A.

Не определяемые понятия можно найти в [4].

Различные циклы $C_1 \in T(G)$ и $C_2 \in T(G)$ назовем смежными циклами в графе G, если $V_G(C_1) \cap V_G(C_2) \neq \emptyset$.

Последовательность $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ различных простых циклов графа G, где $p \geq 2$, назовем гирляндой в графе G, если для $\forall j, 1 \leq j \leq p-1$, циклы C_j и C_{j+1} являются смежными циклами в G.

Гирлянду $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ графа G назовем простой гирляндой в графе G, если для любых i и j, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq i < j \leq p$, $j - i \geq 2$, циклы C_i и C_j не смежны.

Гирлянду $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ графа G, где $p \geq 3$, назовем ожерельем в графе G, если циклы C_1 и C_p смежны.

Ожерелье $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ графа G назовем простым ожерельем в графе G, если выполнено одно из следующих двух условий:

1. $p = 3$ и $V_G(C_1) \cap V_G(C_2) \cap V_G(C_3) = \emptyset$;

2. $p \geq 4$ и выполнены условия

   (a) последовательность $(C_1, C_2, \dots, C_{p-1})$ является простой гирляндой графа G,

   (b) C_p смежен и с циклом C_1, и с циклом C_{p-1},

   (c) для $\forall j, 2 \leq j \leq p-2$, C_p не смежен с C_j.

Легко видеть, что имеет место

Теорема 1 *Если $G \in A$, то в G не существует простого ожерелья.*

Подмножество $Q \subseteq T(G)$ простых циклов графа G назовем циклично-связанным, если для любых $C' \in Q$ и $C'' \in Q$ существует гирлянда $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ в графе G, такая, что C_1 совпадает с C', C_p совпадает с C'', а при любых $C' \in Q$ и $C'' \notin Q$ не существует гирлянды $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ в графе G, такой, что C_1 совпадает с C', C_p совпадает с C''.

Граф G назовем циклически-связанным, если множество $T(G)$ является циклично-связанным.

Граф G назовем абсолютно циклически-связанным, если он является циклически-связанным и для любого ребра $(x_1, x_2) \in E(G)$ по меньшей мере одна из вершин x_1 и x_2 принадлежит некоторому циклу.

Легко видеть, что для любого графа G множество $T(G)$ можно представить в виде

$$T(G) = \bigcup_{i=1}^{t} Q_G^i, \text{ где при } 1 \leq i < j \leq t \quad Q_G^i \cap Q_G^j = \emptyset,$$

так, что для $\forall i, 1 \leq i \leq t$, Q^i_G является циклично-связанным подмножеством множества $T(G)$; положим $Q_G \equiv \{Q^1_G, Q^2_G, \ldots, Q^t_G\}$.

Ясно, что по любому графу G множество Q_G определяется однозначно.

Рассмотрим множество подграфов $\{W^1_G, W^2_G, \ldots, W^t_G\}$ графа G, таких, что для $\forall i$, $1 \leq i \leq t$,

$$W^i_G = < V^c_G(Q^i_G) \cup \{\nu \in V(G)/d_G(\nu) = 1 \text{ и } \exists \omega \in V^c_G(Q^i_G) \text{ такое, что } (\nu, \omega) \in E(G)\} >_G .$$

Положим $D_G \equiv < V(G) \backslash (\bigcup_{i=1}^t V_G(W^i_G)) >_G$.

Ясно, что D_G является лесом. Пусть $\{D^1_G, \ldots, D^{N(D_G)}_G\}$ есть множество компонент связности леса D_G, где через $N(D_G)$ обозначается количество компонент связности леса D_G.

Положим $Struct(G) \equiv \{D^1_G, \ldots, D^{N(D_G)}_G\} \cup \{W^1_G, \ldots, W^t_G\}$.

Пусть G_1 и G_2 – связные графы, для которых $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, а $e_1 = (x_1, w_1)$ и $e_2 = (x_2, w_2)$ – их висячие ребра, соответственно, причем $d_{G_1}(w_1) = d_{G_2}(w_2) = 1$.

Определим граф $G_1 + (e_1 = e_2) + G_2$, который в дальнейшем будем называть графом, полученным из графов G_1 и G_2 операцией склейки ребер e_1 и e_2, следующим образом:

$$V(G_1 + (e_1 = e_2) + G_2) \equiv (V(G_1) \backslash \{w_1\}) \cup (V(G_2) \backslash \{w_2\}),$$
$$E(G_1 + (e_1 = e_2) + G_2) \equiv (E(G_1) \backslash \{e_1\}) \cup (E(G_2) \backslash \{e_2\}) \cup \{(x_1, x_2)\}.$$

Теорема 2 *Для связного графа G существует множество $Constr(G) \equiv \{G_1, \ldots, G_k\}$ таких подграфов графа G, что:*

1. *граф G получается из графов множества $Constr(G)$ последовательными операциями, каждая из которых является операцией склейки ребер;*

2. *для $\forall i$, $1 \leq i \leq k$, G_i является деревом или абсолютно циклически-связанным графом.*

Доказательство проведем индукцией по $|Struct(G)|$.

Если $|Struct(G)| = 1$, то возьмем $Constr(G) \equiv \{G\}$, и доказывать нечего.

Пусть теперь $|Struct(G)| > 1$, и предположим, что для любого связного графа G' с $|Struct(G')| = |Struct(G)| - 1$ существует множество $Constr(G')$ таких подграфов графа G', что выполняются условия 1 и 2. Покажем, что и для графа G существует множество $Constr(G)$ таких его подграфов, что выполняются условия 1 и 2.

Из связности G и из определения $Struct(G)$ следует, что существует граф $G_0 \in Struct(G)$, такой, что существует единственное ребро $e_0 = (v^1_0, v^2_0) \in V(G)$, удовлетворяющее условиям $v^1_0 \in V(G_0)$ и $v^2_0 \in V(G) \backslash V(G_0)$.

Рассмотрим граф $G'_0 \equiv < (V(G) \backslash V(G_0)) \cup \{v^1_0\} >_G$.

Так как $|Struct(G'_0)| = |Struct(G)| - 1$, то, по предположению индукции, для графа G'_0 существует множество $Constr(G'_0)$ его подграфов, удовлетворяющих условиям 1 и 2. С другой стороны, граф G получается из графов G'_0 и $G''_0 \equiv < V(G_0) \cup \{v^2_0\} >_G$

операцией склейки ребер. Таким образом, множество $Constr(G) \equiv Constr(G'_0) \cup \{G''_0\}$ удовлетворяет условию 1.

Из определения $Struct(G)$ вытекает, что граф G_0 и, следовательно, граф G''_0 являются абсолютно циклически-связанными графами или деревьями.

Теорема доказана.

Легко доказуема

Теорема 3 *Пусть G_1 и G_2 – связные графы, для которых $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, e_1 и e_2 – их висячие ребра, соответственно, и по меньшей мере один из графов G_1 и G_2 является двудольным. Чтобы для графа $G_1 + (e_1 = e_2) + G_2$ существовало локально-сбалансированное 2-разбиение, необходимо и достаточно, чтобы для обоих графов G_1 и G_2 существовали локально-сбалансированные 2-разбиения.*

Для $\forall G \in A$ цикловой расцветкой графа G назовем функцию $F : V_2(G) \times T(G) \to \{-1,0,1,2\}$, удовлетворяющую условию: для $\forall (x,C) \in V_2(G) \times T(G)$ $F(x,C) \geq 0$ тогда и только тогда, когда $C \in C_G(x)$.

Пусть C – простой цикл графа $G \in A$, τ – некоторое направление обхода цикла C, и F – произвольная цикловая расцветка графа G.

(F,τ,C)-костью длины $k (k \geq 2)$ в графе G назовем последовательность $(v_{i_1},\dots,v_{i_k})$ вершин цикла C, такую, что выполняются условия:

1. среди вершин $v_{i_1}, v_{i_2},\dots,v_{i_k}$ повторяющихся вершин нет, за исключением единственного возможного случая повторения, когда $v_{i_1} = v_{i_k}$.

2. для $\forall j, 1 \leq j \leq k-1$, существует вершина $u_{j,j+1}$ цикла C (которую назовем промежуточной для v_{i_j} и $v_{i_{j+1}}$), которая при обходе цикла C по направлению τ следует непосредственно после v_{i_j}, и непосредственно после которой следует $v_{i_{j+1}}$, причем вершина $u_{j,j+1}$ удовлетворяет одному из следующих двух условий:

   (a) $d_G(u_{j,j+1}) = 2$,

   (b) $u_{j,j+1} \in V_2(G)$ и $0 \leq F(u_{j,j+1}, C) \leq 1$.

(F,τ,C)-кость $(v_{i_1}, v_{i_2},\dots,v_{i_k})$ в графе G назовем циклической, если $v_{i_1} = v_{i_k}$.

(F,τ,C)-кость графа G назовем монополярной (гетерополярной), если число ее промежуточных вершин x, удовлетворяющих условию «$d_G(x) = 2$ или $x \in V_2(G)$ и $F(x,C) = 1$», является четным (нечетным).

Множеством вершин (F,τ,C)-кости $\omega = (v_{i_1}, v_{i_2},\dots,v_{i_k})$ графа G назовем множество $\{v_{i_1}, v_{i_2},\dots,v_{i_k}\}$ и обозначим его через $V_G^b(\omega)$.

Скажем, что (F,τ,C)-кость ω графа G проходит через вершину ν, если $\nu \in V_G^b(\omega)$.

Для данной вершины $\nu \in V_G(C)$ через $MB(F,C,\nu)$ (сокращение от Maximum Bones) обозначим множество всех (F,τ,C)-костей графа G, проходящих через вершину ν и имеющих максимальную длину.

Пусть $G \in A$ является циклически-связанным графом.

Определим функцию $F_G : V_2(G) \times T(G) \to \{-1,0,1,2\}$.

Не ограничивая общность дальнейших рассуждений, можем считать, что $V_2(G) \neq \emptyset$.

Алгоритм построения функции F_G.

Шаг 1. Для любого $(x,C) \in V_2(G) \times T(G)$, где $C \notin C_G(x)$, положим $F_G(x,C) \equiv -1$.

Шаг 2. Положим $C[0] = \emptyset, t = 1$.

Шаг 3. Пусть цикл C_t графа G удовлетворяет условиям

$$C_t \in T(G) \backslash C[t-1] \text{ и } |V_G(C_t) \cap V_G^c((T(G) \backslash C[t-1]) \backslash C_t)| = 1.$$

Существование такого цикла C_t вытекает из неравенства $|T(G) \backslash C[t-1]| \geq 2$, теоремы 1 и из того, что G является циклически-связанным графом класса A.

Обозначим через u_t вершину цикла C_t, удовлетворяющую условию

$$V_G(C_t) \cap V_G^c((T(G) \backslash C[t-1]) \backslash C_t) = \{u_t\}.$$

Пусть $V_G(C_t) \cap \lambda(u_t) = \{v_{1t}, v_{2t}\}$.

Замечание 1 *Если $(V_G(C_t) \backslash \{u_t\}) \cap V_2(G) \neq \emptyset$, то на множестве $((V_G(C_t) \backslash \{u_t\}) \cap V_2(G)) \times T(G)$ функция F_G уже определена.*

Пусть τ_t – такое направление обхода цикла C_t, при котором вершина u_t не следует непосредственно после вершины v_{1t}.

Положим

$$F_G(u_t, C_t) \equiv \begin{cases} 0\ (1), & \text{если существует монополярная (гетерополярная)} \\ & (F_G, \tau_t, C_t)\text{-кость } (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}), \text{ такая, что } v_{i_1} = v_{1t},\ v_{i_2} = v_{2t}. \\ 2, & \text{если не существует } (F_G, \tau_t, C_t)\text{-кости } (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}), \text{ такой,} \\ & \text{что } v_{i_1} = v_{1t},\ v_{i_2} = v_{2t}. \end{cases}$$

Положим $C[t] \equiv C[t-1] \cup \{C_t\}$.

Если $|C_G(u_t) \backslash C[t]| = 1$, то обозначим через C_t' цикл, удовлетворяющий условию $C_G(u_t) \backslash C[t] = \{C_t'\}$, и положим

$$F_G(u_t, C_t') \equiv \begin{cases} 2, & \text{если } \{C \in (C_G(u_t) \backslash \{C_t'\}) / F_G(u_t, C) = 2\} \neq \emptyset \text{ или } L_G(u_t) \neq \emptyset \\ 0\ (1), & \text{если } \{C \in (C_G(u_t) \backslash \{C_t'\}) / F_G(u_t, C) = 2\} = \emptyset,\ L_G(u_t) = \emptyset \quad \text{и} \\ & \text{число } |\{C \in (C_G(u_t) \backslash \{C_t'\}) / F_G(u_t, C) = 0\}| \text{ нечетно (четно).} \end{cases}$$

Шаг 4. Если $|T(G) \backslash C[t]| \neq 1$, то положим $t = t+1$ и перейдем к **Шагу 3**, в противном случае положим $C_{|T(G)|} \equiv C'$, где $\{C'\} = T(G) \backslash C[t]$, и **Алгоритм завершен.**

Замечание 2 *Легко видеть, что функция F_G, построенная при применении описанного алгоритма, является цикловой расцветкой графа G.*

Лемма 1 *Пусть $G \in A$ является циклически-связанным графом, а f – локально-сбалансированное 2-разбиение графа G. Тогда, если последовательность $\widetilde{\omega} \equiv (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})$ является $(F_G, \widetilde{\tau}, \widetilde{C})$-костью в графе G при некотором направлении $\widetilde{\tau}$ обхода цикла $\widetilde{C}$, то имеет место равенство*

$$f(v_{i_1}) = \begin{cases} f(v_{i_n}), & \textit{если } (F_G, \widetilde{\tau}, \widetilde{C})\textit{-кость } \widetilde{\omega} \textit{ монополярна;} \\ 1 - f(v_{i_n}), & \textit{если } (F_G, \widetilde{\tau}, \widetilde{C})\textit{-кость } \widetilde{\omega} \textit{ гетерополярна.} \end{cases}$$

Доказательство проведем индукцией по параметру t, используемому в алгоритме построения функции F_G. Будем считать, что вершины и подграфы графа G, описываемые с применением значений параметра t в индексе обозначения, совпадают с соответствующими объектами, определяемыми при работе алгоритма.

Докажем утверждение леммы для случая, когда $\widetilde{C} = C_1$.

Ясно, что $|V_G(C_1) \cap V_G^c(T(G))| = 1$. Отсюда следует, что $V_G(C_1) \cap V_2(G) = \{u_1\}$.

Случай 1. u_1 не является промежуточной вершиной $(F_G, \widetilde{\tau}, C_1)$-кости $\widetilde{\omega}$.

В этом случае для любой промежуточной вершины x $(F_G, \widetilde{\tau}, C_1)$-кости $\widetilde{\omega}$ $d_G(x) = 2$, откуда и следует нужное равенство.

Случай 2. u_1 является промежуточной вершиной $(F_G, \widetilde{\tau}, C_1)$-кости $\widetilde{\omega}$.

В этом случае ясно, что $0 \le F_G(u_1, C_1) \le 1$, причем из алгоритма построения F_G следует, что $F_G(u_1, C_1) = 0$ ($F_G(u_1, C_1) = 1$) тогда и только тогда, когда существует монополярная (гетерополярная) (F_G, τ_1, C_1)-кость $\omega_1 \equiv (v_{11}, z_{j_1}, \ldots, z_{j_m}, v_{21})$ в графе G, для которой вершина u_1 не является промежуточной. Применяя рассуждение, используемое при рассмотрении **случая 1**, к (F_G, τ_1, C_1)-кости ω_1, можно показать, что

$$f(v_{11}) = \begin{cases} f(v_{21}), & \text{если } (F_G, \tau_1, C_1)\text{-кость } \omega_1 \text{ монополярна;} \\ 1 - f(v_{21}), & \text{если } (F_G, \tau_1, C_1)\text{-кость } \omega_1 \text{ гетерополярна,} \end{cases}$$

из чего вытекает, что

$$f(v_{11}) = \begin{cases} f(v_{21}), & \text{если } F_G(u_1, C_1) = 0; \\ 1 - f(v_{21}), & \text{если } F_G(u_1, C_1) = 1. \end{cases}$$

Отсюда, из определения монополярной (гетерополярной) кости и из рассуждения, проведенного для **случая 1**, вытекает доказываемое равенство.

Допустим, что утвеждение леммы верно для любого цикла C_t, при $1 \le t \le k-1$, где $1 < k \le |T(G)| - 1$.

Докажем утверждение леммы для случая, когда $\widetilde{C} = C_k$.

Случай $1_{\mathbf{ind}}$. u_k не является промежуточной вершиной $(F_G, \widetilde{\tau}, C_k)$-кости $\widetilde{\omega}$.

Рассмотрим произвольную вершину $u_{j,j+1}$, которая является промежуточной вершиной для вершин v_{i_j} и $v_{i_{j+1}}$, где $1 \le j \le n-1$ и $u_{j,j+1} \in V_2(G)$ (отметим, что если такой вершины $u_{j,j+1}$ не существует, то справедливость утверждения леммы для $(F_G, \widetilde{\tau}, C_k)$-кости $\widetilde{\omega}$ устанавливается так же, как и при $t = 1$).

Заметим, что справедливость утверждения леммы для $(F_G, \widetilde{\tau}, C_k)$-кости $\widetilde{\omega}$ будет доказана, если мы докажем равенство

$$f(v_{i_j}) = \begin{cases} f(v_{i_{j+1}}), & \text{если } F_G(u_{j,j+1}, C_k) = 0; \\ 1 - f(v_{i_{j+1}}), & \text{если } F_G(u_{j,j+1}, C_k) = 1. \end{cases}$$

Из алгоритма построения функции F_G вытекает, что для $\forall C \in C_G(u_{j,j+1})$ существует некоторое значение s, $1 \le s \le k-1$, параметра t, используемого в алгоритме, такое, что $u_{j,j+1} = u_s$ и C совпадает с C_s, причем $0 \le F_G(u_{j,j+1}, C_s) \le 1$.

Выберем $\forall C \in C_G(u_{j,j+1})$. В силу сказанного выше, существует s, $1 \le s \le k-1$, такое, что $u_{j,j+1} = u_s$ и C совпадает с C_s. Покажем, что

$$f(v_{1s}) = \begin{cases} f(v_{2s}), & \text{если } F_G(u_{j,j+1}, C_s) = 0; \\ 1 - f(v_{2s}), & \text{если } F_G(u_{j,j+1}, C_s) = 1. \end{cases}$$

Случай $1_{\mathbf{ind}}$a). $F_G(u_{j,j+1}, C_s) = 0$

Ясно, что $F_G(u_s, C_s) = 0$. Следовательно, существует монополярная (F_G, τ_s, C_s)-кость $\omega_s = (v_{1s}, l_{i_1}, \ldots, l_{i_m}, v_{2s})$ в графе G. По предположению индукции, имеет место равенство $f(v_{1s}) = f(v_{2s})$.

Случай $1_{\mathbf{ind}}$b). $F_G(u_{j,j+1}, C_s) = 1$

Ясно, что $F_G(u_s, C_s) = 1$. Следовательно, существует гетерополярная (F_G, τ_s, C_s)-кость $\omega_s = (v_{1s}, l_{i_1}, \ldots, l_{i_m}, v_{2s})$ в графе G. По предположению индукции, имеет место равенство $f(v_{1s}) = 1 - f(v_{2s})$.

Таким образом, искомая связь между $f(v_{1s})$ и $f(v_{2s})$ установлена.

Отсюда и из алгоритма построения функции F_G вытекает искомая связь между $f(v_{i_j})$ и $f(v_{i_{j+1}})$.

Случай $2_{\mathbf{ind}}$. u_k является промежуточной вершиной $(F_G, \widetilde{\tau}, C_k)$-кости $\widetilde{\omega}$.

В этом случае ясно, что $0 \le F_G(u_k, C_k) \le 1$, причем из алгоритма построения F_G следует, что $F_G(u_k, C_k) = 0$ ($F_G(u_k, C_k) = 1$) тогда и только тогда, когда существует монополярная (гетерополярная) (F_G, τ_k, C_k)-кость $\omega_k \equiv (v_{1k}, z_{j_1}, \ldots, z_{j_q}, v_{2k})$ в графе G, для которой вершина u_k не является промежуточной. Применяя рассуждение, используемое при рассмотрении **случая $1_{\mathbf{ind}}$**, к (F_G, τ_k, C_k)-кости ω_k, можно показать, что

$$f(v_{1k}) = \begin{cases} f(v_{2k}), & \text{если } (F_G, \tau_k, C_k)\text{-кость } \omega_k \text{ монополярна;} \\ 1 - f(v_{2k}), & \text{если } (F_G, \tau_k, C_k)\text{-кость } \omega_k \text{ гетерополярна,} \end{cases}$$

из чего вытекает, что

$$f(v_{1k}) = \begin{cases} f(v_{2k}), & \text{если } F_G(u_k, C_k) = 0; \\ 1 - f(v_{2k}), & \text{если } F_G(u_k, C_k) = 1. \end{cases}$$

Отсюда, из определения монополярной (гетерополярной) кости и из рассуждения, проведенного для **случая $1_{\mathbf{ind}}$**, вытекает утверждение леммы для $(F_G, \widetilde{\tau}, C_k)$-кости $\widetilde{\omega}$ графа G.

Допустим, что утверждение леммы верно для любого цикла C_t, при $1 \le t \le |T(G)| - 1$.

Докажем утверждение леммы для случая, когда $\widetilde{C} = C_{|T(G)|}$.

Легко видеть, что в этом случае справедливость утверждения леммы устанавливается так же, как в **случае $1_{\mathbf{ind}}$**.

Лемма доказана.

Следствие 1 *Пусть $G \in A$ является циклически-связанным графом, а f – локально-сбалансированное 2-разбиение графа G. Тогда, если последовательность $\widetilde{\omega} \equiv (v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ является $(F_G, \widetilde{\tau}, \widetilde{C})$-костью в графе G при некотором направлении $\widetilde{\tau}$ обхода цикла $\widetilde{C}$, то значение $f(v_{i_j})$ для $\forall j$, $1 \le j \le n$, однозначно определяется значением $f(v_{i_k})$ при $\forall k$, $1 \le k \le n$.*

Теорема 4 *Пусть $G \in A$ является абсолютно циклически-связанным, двудольным графом. Для того, чтобы существовало локально-сбалансированное 2-разбиение графа G, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall C \in T(G)$ и любого направления τ обхода цикла C не существовало гетерополярной циклической (F_G, τ, C)-кости в графе G.*

Необходимость. Доказательство проведем от противного. Пусть $C_0 \in T(G)$ и последовательность $\omega_0 \equiv (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$ вершин цикла C_0 является гетерополярной циклической (F_G, τ_0, C_0)-костью в графе G при некотором направлении τ_0 обхода цикла C_0, и пусть f является локально-сбалансированным 2-разбиением графа G. Из леммы 1 следует, что $f(v_{i_1}) = 1 - f(v_{i_n})$, но это невозможно, так как ω_0 является циклической (F_G, τ_0, C_0)-костью в графе G.

Достаточность. Предположим, что для любого $C \in T(G)$ и любого направления τ обхода цикла C не существует гетерополярной циклической (F_G, τ, C)-кости в графе G.

Сначала дадим несколько определений.

Для любых $u \in V_2(G)$, $C \in T(G)$ и $i \in \{0, 1, 2\}$ положим:

$$C_G(u, i, C) \equiv \{C' \in C_G(u) / F_G(u, C') = i\} \setminus \{C\}.$$

Пусть $u_0 \in V_2(G)$ – произвольная вершина, а $C_0 \in T(G)$ – произвольный цикл.

Осуществим произвольным образом разбиение множества $C_G(u_0, 0, C_0)$ на подмножества $C_{01}(u_0, C_0)$ и $C_{02}(u_0, C_0)$ так, что

$$C_G(u_0, 0, C_0) = C_{01}(u_0, C_0) \cup C_{02}(u_0, C_0),\ C_{01}(u_0, C_0) \cap C_{02}(u_0, C_0) = \emptyset,$$

$$|C_{01}(u_0, C_0)| = \left\lceil \frac{|C_G(u_0, 0, C_0)|}{2} \right\rceil, |C_{02}(u_0, C_0)| = \left\lfloor \frac{|C_G(u_0, 0, C_0)|}{2} \right\rfloor.$$

Для $j \in \{1, 2\}$ положим: $V_{0j}(u_0, C_0) \equiv \lambda(u_0) \cap V_G^c(C_{0j}(u_0, C_0))$.

Положим $V_0(u_0, C_0) \equiv V_{01}(u_0, C_0) \cup V_{02}(u_0, C_0)$.

Положим: $V_1(u_0, C_0) \equiv \lambda(u_0) \cap V_G^c(C_G(u_0, 1, C_0))$.

Замечание 3 *Для* $\forall C \in C_G(u_0, 1, C_0)$ *имеет место равенство* $|V_1(u_0, C_0) \cap V_G(C)| = 2$.

Осуществим произвольным образом разбиение множества $V_1(u_0, C_0)$ на подмножества $V_{11}(u_0, C_0)$ и $V_{12}(u_0, C_0)$ так, что

$$V_1(u_0, C_0) = V_{11}(u_0, C_0) \cup V_{12}(u_0, C_0),\ V_{11}(u_0, C_0) \cap V_{12}(u_0, C_0) = \emptyset,$$

и для $\forall C \in C_G(u_0, 1, C_0) \quad |V_G(C) \cap V_{11}(u_0, C_0)| = 1,\ |V_G(C) \cap V_{12}(u_0, C_0)| = 1$.

Положим $V_2(u_0, C_0) \equiv (\lambda(u_0) \cap V_G^c(C_G(u_0, 2, C_0))) \cup L_G(u_0)$.

Для любого натурального числа m_0 осуществим произвольным образом разбиение множества $V_2(u_0, C_0)$ на подмножества $V_{21}(u_0, C_0, m_0)$, $V_{22}(u_0, C_0, m_0)$ и $V_{23}(u_0, C_0, m_0)$ так, что

$$V_2(u_0, C_0) = V_{21}(u_0, C_0, m_0) \cup V_{22}(u_0, C_0, m_0) \cup V_{23}(u_0, C_0, m_0),$$
$$V_{21}(u_0, C_0, m_0) \cap V_{22}(u_0, C_0, m_0) = \emptyset,\ V_{22}(u_0, C_0, m_0) \cap V_{23}(u_0, C_0, m_0) = \emptyset,$$
$$V_{21}(u_0, C_0, m_0) \cap V_{23}(u_0, C_0, m_0) = \emptyset,$$

и имеет место одно из нижеуказанных условий:

1. $|V_2(u_0, C_0)| \le m_0$, $V_{21}(u_0, C_0, m_0) = V_2(u_0, C_0)$, $V_{22}(u_0, C_0, m_0) = \emptyset$, $V_{23}(u_0, C_0, m_0) = \emptyset$.

2. $|V_2(u_0,C_0)| > m_0$, $|V_{21}(u_0,C_0,m_0)| = m_0$, $|V_{22}(u_0,C_0,m_0)| = \left\lceil \frac{|V_2(u_0,C_0)|-m_0}{2} \right\rceil$,
$|V_{23}(u_0,C_0,m_0)| = \left\lfloor \frac{|V_2(u_0,C_0)|-m_0}{2} \right\rfloor$.

Заметим, что $\lambda(u_0)\backslash(V_0(u_0,C_0) \cup V_1(u_0,C_0) \cup V_2(u_0,C_0)) \neq \emptyset$ и $\lambda(u_0)\backslash(V_0(u_0,C_0) \cup V_1(u_0,C_0) \cup V_2(u_0,C_0)) \subseteq V_G(C_0)$.

Пусть $\nu_0 \in V(G)$ – произвольная вершина графа G.

Для любого натурального числа m_0 осуществим произвольным образом разбиение множества $L_G(\nu_0)$ на подмножества $L_1(\nu_0,m_0)$, $L_2(\nu_0,m_0)$ и $L_3(\nu_0,m_0)$ так, что

$$L_G(\nu_0) = L_1(\nu_0,m_0) \cup L_2(\nu_0,m_0) \cup L_3(\nu_0,m_0),\ L_1(\nu_0,m_0) \cap L_2(\nu_0,m_0) = \emptyset,$$
$$L_2(\nu_0,m_0) \cap L_3(\nu_0,m_0) = \emptyset,\ L_1(\nu_0,m_0) \cap L_3(\nu_0,m_0) = \emptyset,$$

и имеет место одно из нижеуказанных условий:

1. $|L_G(\nu_0)| \leq m_0$, $L_1(\nu_0,m_0) = L_G(\nu_0)$, $L_2(\nu_0,m_0) = \emptyset$, $L_3(\nu_0,m_0) = \emptyset$.
2. $|L_G(\nu_0)| > m_0$, $|L_1(\nu_0,m_0)| = m_0$, $|L_2(\nu_0,m_0)| = \left\lceil \frac{|L_G(\nu_0)|-m_0}{2} \right\rceil$,
$|L_3(\nu_0,m_0)| = \left\lfloor \frac{|L_G(\nu_0)|-m_0}{2} \right\rfloor$.

Дадим алгоритм построения функции $f : V(G) \to \{0,1\}$.

Будем считать, что вершины и подграфы графа G, описываемые с применением значений параметра t в индексе обозначения, используемого в нижеуказанном алгоритме построения 2-разбиения f, совпадают с соответствующими объектами, определяемыми при работе алгоритма построения функции F_G.

Алгоритм

Шаг 1. Положим $t = |T(G)|$.

Шаг 2. Если значение функции f на всех вершинах множества $V_G(C_t)$ определено, то перейдем к **шагу 3**.

Пусть вершина $v_0 \in V_G(C_t)$ такова, что значение функции f на нем не определено.

Положим $f(v_0) \equiv 0$.

Если $MB(F_G,C_t,v_0) \neq \emptyset$, то определим значение функции f на вершинах множества $V_G^b(\omega')\backslash\{v_0\}$, где ω' – произвольный элемент из $MB(F_G,C_t,v_0)$, на основе значения $f(v_0)$ по схеме, вытекающей из следствия 1.

Перейдем к **шагу 2**.

Шаг 3. Если $t = 1$, то перейдем к **шагу 5**.

Замечание 4 *Для* $\forall u \in V_2(G) \cap V_G(C_t) \cap V_G^c(\{C_{t-1},\ldots,C_1\})$ *значение функции* f *на множестве* $\lambda(u)\backslash(V_0(u,C_t) \cup V_1(u,C_t) \cup V_2(u,C_t))$ *уже определено и еще не определено на множестве* $V_0(u,C_t) \cup V_1(u,C_t) \cup V_2(u,C_t)$.

Для каждой вершины $u_0 \in V_2(G) \cap V_G(C_t) \cap V_G^c(\{C_{t-1},\ldots,C_1\})$ дадим ряд определений.

Пусть $\nu_0 \in \lambda(u_0)\backslash(V_0(u_0,C_t) \cup V_1(u_0,C_t) \cup V_2(u_0,C_t))$.

Для $\forall \nu \in V_{01}(u_0, C_t)$ положим $f(\nu) \equiv 1 - f(\nu_0)$.
Для $\forall \nu \in V_{02}(u_0, C_t)$ положим $f(\nu) \equiv f(\nu_0)$.
Для $\forall \nu \in V_{11}(u_0, C_t)$ положим $f(\nu) \equiv 0$.
Для $\forall \nu \in V_{12}(u_0, C_t)$ положим $f(\nu) \equiv 1$.

Замечание 5 *Для всех вершин множества $\lambda(u_0) \backslash V_2(u_0, C_t)$ значение функции f уже определено.*

Положим $p(u_0) \equiv P(\lambda(u_0) \backslash V_2(u_0, C_t), f)$.
Для $\forall \nu \in V_{21}(u_0, C_t, |p(u_0)|)$ положим:

$$f(\nu) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } p(u_0) > 0; \\ 1, & \text{если } p(u_0) < 0. \end{cases}$$

Для $\forall \nu \in V_{22}(u_0, C_t, |p(u_0)|)$ положим $f(\nu) \equiv 0$.
Для $\forall \nu \in V_{23}(u_0, C_t, |p(u_0)|)$ положим $f(\nu) \equiv 1$.
Шаг 4. Положим $t = t - 1$.

Если $MB(F_G, C_t, u_t) \neq \emptyset$, то определим значение функции f на вершинах множества $V_G^b(\omega') \backslash \{u_t\}$, где ω' – произвольный элемент из $MB(F_G, C_t, u_t)$, на основе значения $f(u_t)$ по схеме, вытекающей из следствия 1.

Если $MB(F_G, C_t, v_{1t}) \neq \emptyset$, то определим значение функции f на вершинах множества $V_G^b(\omega')) \backslash \{v_{1t}, v_{2t}\}$, где ω' – произвольный элемент из $MB(F_G, C_t, v_{1t})$, на основе значения $f(v_{1t})$ по схеме, вытекающей из следствия 1.

Замечание 6 *Если $MB(F_G, C_t, v_{1t}) \cap MB(F_G, C_t, v_{2t}) \neq \emptyset$, то значение функции f на вершине v_{2t}, определяемое на основе значения $f(v_{1t})$ по схеме, вытекающей из следствия 1, совпадает с уже определенным значением $f(v_{2t})$.*

Если $MB(F_G, C_t, v_{2t}) \neq \emptyset$ и $MB(F_G, C_t, v_{1t}) \cap MB(F_G, C_t, v_{2t}) = \emptyset$, то определим значение функции f на вершинах множества $V_G^b(\omega') \backslash \{v_{2t}\}$, где ω' – произвольный элемент из $MB(F_G, C_t, v_{2t})$, на основе значения $f(v_{2t})$ по схеме, вытекающей из следствия 1.

Перейдем к **шагу 2**.
Шаг 5.

Замечание 7 *Для всех вершин множества $V(G) \backslash L(G)$ значение функции f уже определено.*

Для каждой вершины $\nu_0 \in V(G) \backslash (L(G) \cup V_2(G))$ дадим следующие определения.
Положим $q(\nu_0) \equiv P(\lambda(\nu_0) \backslash L_G(\nu_0), f)$.
Для $\forall \nu \in L_1(\nu_0, |q(\nu_0)|)$ положим:

$$f(\nu) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } q(\nu_0) > 0; \\ 1, & \text{если } q(\nu_0) < 0. \end{cases}$$

Для $\forall \nu \in L_2(\nu_0, |q(\nu_0)|)$ положим $f(\nu) \equiv 0$.
Для $\forall \nu \in L_3(\nu_0, |q(\nu_0)|)$ положим $f(\nu) \equiv 1$.
Алгоритм завершен.

Докажем, что полученное 2-разбиение f графа G является локально-сбалансированным.

Выберем произвольную вершину $u \in V(G)$.

Случай 1. $u \in L(G)$.

В этом случае $d_G(u) = 1$ и, следовательно, $|P(\lambda(u), f)| = 1 \leq 1$.

Случай 2. $u \in V(G) \backslash (L(G) \cup V_2(G))$.

Случай 2а). $|L_G(u)| > q(u)$.

Легко видеть, что в этом случае из определения функции f следует, что

$$P(\lambda(u) \backslash L_G(u), f) + P(L_1(u, |q(u)|), f) = 0 \text{ и } |P(L_2(u, |q(u)|), f) + P(L_3(u, |q(u)|), f)| \leq 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}|P(\lambda(u), f)| = |P(\lambda(u) \backslash L_G(u), f) + P(L_G(u), f)| = |P(\lambda(u) \backslash L_G(u), f) + \\ + P(L_1(u, |q(u)|), f) + P(L_2(u, |q(u)|), f) + P(L_3(u, |q(u)|), f)| \leq 1\end{aligned}$$

Случай 2б). $|L_G(u)| \leq q(u)$.

Легко видеть, что в этом случае из определения функции f следует, что

$$|P(\lambda(u), f)| = |P(\lambda(u) \backslash L_G(u), f) + P(L_G(u), f)| = |P(\lambda(u) \backslash L_G(u), f)| - |L_G(u)|.$$

Заметим, что $|\lambda(u) \backslash L_G(u)| = 2$, следовательно, $|P(\lambda(u) \backslash L_G(u), f)| \leq 2$.

Из последнего неравенства следует, что если $|L_G(u)| > 0$, то $|P(\lambda(u), f)| \leq 1$.

Предположим, что $|L_G(u)| = 0$, следовательно, $d_G(u) = 2$.

В этом случае из определения кости следует, что u является промежуточной вершиной в некоторой кости.

С другой стороны, согласно схеме, вытекающей из следствия 1, на вершинах кости, имеющих в качестве промежуточной вершины вершину степени 2, любое локально-сбалансированное 2-разбиение должно принимать различные значения. Следовательно, из определения функции f получаем, что $|P(\lambda(u), f)| = 0 \leq 1$.

Случай 3. $u \in V_2(G)$.

Пусть $C \in C_G(u)$ есть цикл, имеющий максимальный номер в нумерации циклов, данном в алгоритме построения функции F_G.

Случай 3а). $|V_2(u, C)| > p(u)$.

Легко видеть, что в этом случае из определения функции f следует, что

$$\begin{aligned}&P(\lambda(u) \backslash V_2(u, C), f) + P(V_{21}(u, C, |p(u)|), f) = 0 \quad \text{и} \\ &|P(V_{22}(u, C, |p(u)|), f) + P(V_{23}(u, C, |p(u)|), f)| \leq 1.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&|P(\lambda(u), f)| = |P(\lambda(u) \backslash V_2(u, C), f) + P(V_2(u, C), f)| = \\ &= |P(\lambda(u) \backslash V_2(u, C), f) + P(V_{21}(u, C, |p(u)|), f) + P(V_{22}(u, C, |p(u)|), f) + \\ &+ P(V_{23}(u, C, |p(u)|), f)| \leq 1\end{aligned}$$

Случай 3б). $|V_2(u,C)| \leq p(u)$.

Легко видеть, что в этом случае из определения функции f следует, что

$$|P(\lambda(u),f)| = |P(\lambda(u)\backslash V_2(u,C),f) + P(V_2(u,C),f)| = |P(\lambda(u)\backslash V_2(u,C),f)| - |V_2(u,C)|.$$

С другой стороны, из определения функции f следует, что

$$|P(\lambda(u)\backslash(V_0(u,C)\cup V_1(u,C)\cup V_2(u,C)),f) + P(V_0(u,C),f)| \leq 2,$$
$$P(V_1(u,C),f) = 0.$$

Следовательно,

$$|P(\lambda(u)\backslash V_2(u,C),f)| = |P(\lambda(u)\backslash(V_0(u,C)\cup V_1(u,C)\cup V_2(u,C)),f) + P(V_0(u,C),f) +$$
$$+ P(V_1(u,C),f)| = |P(\lambda(u)\backslash(V_0(u,C)\cup V_1(u,C)\cup V_2(u,C)),f) + P(V_0(u,C),f)| \leq 2$$

Из последнего неравенства следует, что если $|V_2(u,C)| > 0$, то $|P(\lambda(u),f)| \leq 1$, а если $|V_2(u,C)| = 0$, то из алгоритма построения функции F_G следует, что $|P(V_0(u,C),f) + P(\lambda(u)\backslash(V_0(u,C)\cup V_1(u,C)\cup V_2(u,C)),f)| = 0$, следовательно,
$|P(\lambda(u),f)| = 0 \leq 1$.

Теорема доказана.

Легко видеть, что имеет место

Теорема 5 *Для любого дерева существует локально-сбалансированное 2-разбиение.*

Из теорем 2, 3, 4, 5 вытекает

Теорема 6 *Пусть $G \in A$ является двудольным связным графом. Для того, чтобы существовало локально-сбалансированное 2-разбиение графа G, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall G' \in Constr(G)$, не являющегося деревом, для $\forall C \in T(G')$ и любого направления τ обхода цикла C не существовало гетерополярной циклической $(F_{G'},\tau,C)$-кости в графе G'.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баликян С.В., Камалян Р.Р.* Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 3$. // Доклады НАН РА. 2005. Т. 105, № 1. С. 21–27.

2. *Баликян С.В., Камалян Р.Р.* Об NP-полноте задачи существования локально-сбалансированного 2-разбиения двудольных графов G с $\Delta(G) = 4$ при расширенном определении окрестности вершины. // Доклады НАН РА. 2006. Т. 106, № 3. С. 218–226.

3. *Berge C.* Graphs and Hypergraphs. North-Holland, 1973. 528 p.

4. *Харари Ф.* Теория графов. Москва: Мир, 1973. 302 с.

ON LOCALLY-BALANCED 2-PARTITIONS OF SOME BIPARTITE GRAPHS

Balikyan S.V.

Necessary and sufficient condition is obtained for the problem of such partitioning of the set of vertices of a bipartite graph G, in which arbitrary two simple cycles have at most one common vertex, into two disjoint subsets V_1 *and* V_2*, which satisfies the condition* $||\lambda(v) \cap V_1| - |\lambda(v) \cap V_2|| \leq 1$ *for any vertex v of G, where* $\lambda(v)$ *is the set of all vertices of G adjacent to v.*