ПРИБЛИЖЕНИЕ КРИВЫХ МНОГОФОКУСНЫМИ ЛЕМНИСКАТАМИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ракчеева Т. А.

Решается задача аналитического приближения поточечно заданных гладких замкнутых кривых многофокусными лемнискатами на комплексной плоскости. Аппроксимируемая кривая представляется при этом конечной совокупностью точек-фокусов внутри кривой. Разработан и исследован метод построения аппроксимирующей лемнискаты как линии уровня модуля комплексного полинома, использующий отображение аппроксимируемой кривой на фазовую окружность

Актуальной задачей современной прикладной математики является аналитическая аппроксимация эмпирических кривых или кривых, являющихся результатом сложных вычислительных конструкций. Аппроксимация выполняется с использованием того или иного класса функций, определяемого целевым назначением прикладной задачи. Широкий круг задач решается хорошо разработанными методами аппроксимации тригонометрическими или алгебраическими полиномами [8]. Предлагаемый в данной работе метод фокусной аппроксимации решает эту задачу в классе функций, называемых многофокусными лемнискатами и определяемых мультипликативным инвариантом расстояний от произвольной точки кривой до фокусов.

Задача. Кривая С задана на плоскости конечным набором n отсчетов $\{x_j, y_j\}$ на вещественной или $\{z_j\}$ на комплексной плоскости. Требуется построить описание кривой C аналитическими функциями, проходящее по возможности близко, как к точкам задания кривой, так и к отрезкам прямой, соединяющим топологически соседние ее точки. На дискретное описание кривой C накладывается требование репрезентативности ее формы, в смысле представимости кусочно-линейной интерполяцией через заданные точки, и не накладываются требования параметризации и упорядоченности - точки могут быть заданы в произвольном порядке. Результат приближения также свободен от параметризации и определяется только формой кривой.

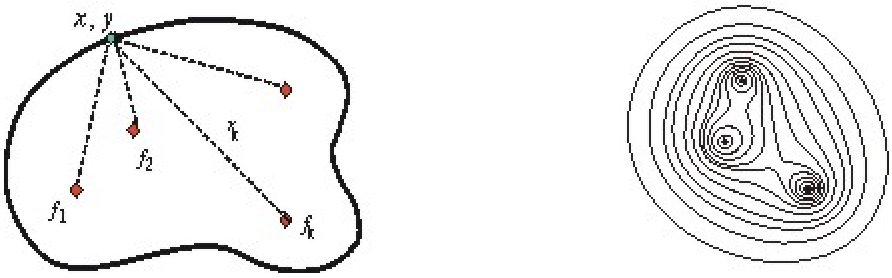
Лемнискаты. Многофокусные лемнискаты представляют собой гладкие замкнутые кривые без самопересечений, не обязательно односвязные, содержащие внутри себя конечное число фокусов. Лемниската определяется через m точек-фокусов на плоскости и числовой параметр R как геометрическое место точек, для которого сохраняется постоянным, равным R, произведение расстояний до всех m фокусов (рис. 1а). Определяющий инвариант лемнискаты можно записать как в вещественной, так и в комплексной форме:

$$\prod_{k=1}^{m} r_k = R^m \quad \text{или} \quad \prod_{k=1}^{m} |z - z_k| = R^m, \tag{1}$$

где $r_k^2 = (x - a_k)^2 + (y - b_k)^2$ – евклидово расстояние от произвольной точки лемнискаты $\{x,y\}$ до k-го фокуса f_k с вещественными координатами $\{a_k, b_k\}$, m - число фокусов ($k =$

1, …, m), R – радиус лемнискаты, $z = x + iy$ – комплексные координаты точки лемнискаты, $z_k = a_k + ib_k$ – комплексные координаты k-го фокуса.

Для фиксированного набора фокусов лемнискаты с разными радиусами образуют семейство вложенных кривых: кривые с большим радиусом охватывают кривые с меньшим радиусом, нигде с ними не пересекаясь. Для маленьких значений радиуса лемнискаты приближенно представляют собой m окружностей вокруг m фокусов. С ростом R они «растут», сливаясь между собой в односвязную кривую сложной формы. С дальнейшим ростом радиуса лемниската увеличивается, теряя сложность, и в пределе превращаясь в одну окружность [1, 2]. Такова эволюция формы многофокусной лемнискаты в зависимости от значений радиуса на всем диапазоне от 0 до ∞ (рис. 1б).



а) б)

Рис. 1. Многофокусные лемнискаты: а) лемнискатический инвариант; б) семейство изофокусных лемнискат с тремя фокусами

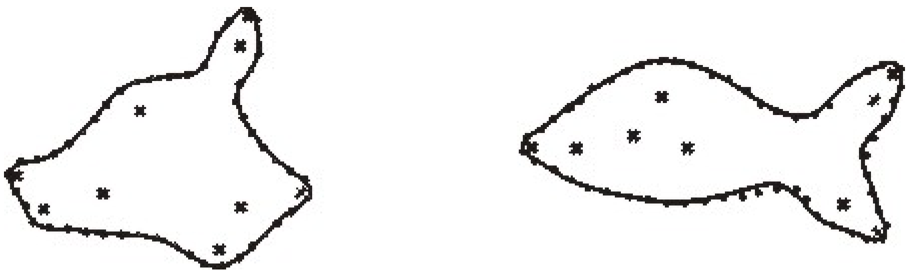
Приближение. Принципиальная возможность приближенного описания гладких замкнутых кривых многофокусными лемнискатами доказана Д.Гильбертом [10], но вопрос том, каким образом для конкретной эмпирической кривой, заданной координатами n своих точек z_j ($j = 1, …, n$), определить радиус, количество фокусов и их координаты, остался открытым. Система многофокусных лемнискат не составляет ортогонального базиса, подобно тригонометрическим функциям, поэтому задачу построения приближенного фокусного описания кривой пока не удается решить аналитически. Ее решение возможно в разных численных и аналитико-алгоритмических вещественных или комплексных вариантах. В работах [3-5] описаны конструктивные методы решения обратной задачи: поиска фокусов аппроксимирующей лемнискаты на вещественной плоскости. Данная работа посвящена методам определения параметров фокусной аппроксимации на комплексной плоскости [4].

Критерии близости кривых. Один из принципиальных вопросов в решении задачи – критерий близости двух кривых. Для работы с фокусным методом определены и работают два критерия. Один (L-критерий) минимаксный: max min $r(z_j,l)$, где $r(z_j,l)$ – расстояние в смысле обычной евклидовой метрики от точки кривой z_j до точки l аппроксимирующей лемнискаты, минимум ищется по l, а максимум - по j. L-критерий универсальный, он не привязан к системе аппроксимирующих функций. R-критерий, напротив, специальный, вытекающий из инвариантного свойства лемнискаты сохранять во всех своих точках постоянным значение радиуса. Он устанавливает соответствие между степенью близости кривых C и L и мерой отклонения значения радиуса вдоль кривой C от константы. L-критерий отвечает нашему интуитивному представлению о сходстве, однако он ресурсоемкий, R-критерий менее нагляден, но проще в вычислениях. Показано, что при стремлении к нулю расстояния между кривой и лемнискатой стремятся к нулю и колебания радиуса на кривой и наоборот.

Фокусное приближение. Задачу фокусного приближения в общем виде можно сформулировать следующим образом:

Пусть имеется гладкая замкнутая кривая C без самопересечений, не обязательно односвязная, заданная координатным описанием конечного набора своих точек $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1,..., n$. *Требуется найти такую систему фокусов* $z_k = a_k + ib_k$, $k = 1,..., m$, *что при определенном значении радиуса R соответствующая им лемниската будет близка с необходимой точностью к заданной кривой C в смысле выбранного критерия.*

Координаты фокусов и радиус в количестве m+1 составляют полный набор степеней свободы фокусной аппроксимации. Подобрав соответствующее количество фокусов и их расположение, можно получить лемнискату, сколь угодно близкую к заданной кривой *C*. На рис. 2 даны примеры фокусного приближения двух кривых.



а) б)

Рис.2. Фокусное приближение кривых: а) фокусного, б) эмпирического происхождения

Лемниската как линия уровня модуля комплексного полинома. Лемниската может быть естественно задана на комплексной плоскости. Определяющий инвариант лемнискаты (1) формулируется в виде постоянства модуля комплексного полинома:

$$|F(z)| = R^m. \qquad (2)$$

Здесь $F(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + ... + c_{m-1}z^{m-1} + z^m$ - полином с комплексными коэффициентами, имеющий своими корнями m фокусов лемнискаты $z_1, \dots, z_m$ (старший коэффициент полинома равен 1). Лемниската в форме (2) представляет собой линию уровня модуля комплексного полинома $|F(z)|$, представляющего, в свою очередь, комплексную запись вещественного полинома $P(x,y)$.

Подходы к решению и постановка задачи. Применение метода наименьших квадратов непосредственно к поиску координат фокусов приводит к системе уравнений степени $2m$ и растет с ростом числа фокусов [2, 4]. Уравнения для определения коэффициентов многочлена $F(z)$ оказываются проще, поэтому аппроксимационную задачу предполагается разбить на две части: сначала найти комплексный полином $F(z)$, модуль которого постоянен на кривой и равен радиусу лемнискаты, а затем его корни – фокусы. Постановка задачи может быть теперь переформулирована в следующем виде:

Требуется найти полином степени m: $F(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + ... + c_{m-1}z^{m-1} + z^m$ *с комплексными коэффициентами* $c = a + ib$ *и вещественным радиусом R такой, что лемниската, определяемая уравнением (1), приближала бы в смысле выбранного критерия кривую, заданную точками* $z_1, z_2, \dots, z_n$, *где* $z_j = x_j + iy_j$. *Затем по найденному* *полиному должны быть определены его корни, являющиеся фокусами аппроксимирующей лемнискаты.*

Использование в данной постановке среднеквадратичного критерия точности приближения ставит задачу минимизации функционала:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left|F(z_j)-R\right|\right)^2 \to \min .$$

В точке минимума имеем систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left|F(z_j)\right|^2-R^2\right)\left(F(z_j)\overline{z_j^k}\right)=0, \quad k=1,\ldots,m. \qquad (3)$$

Эта система не является линейной относительно неизвестных компонент комплексных коэффициентов полинома $F(z)$, однако она является более простой: составляющие ее уравнения имеют степень 3, независимо от числа фокусов.

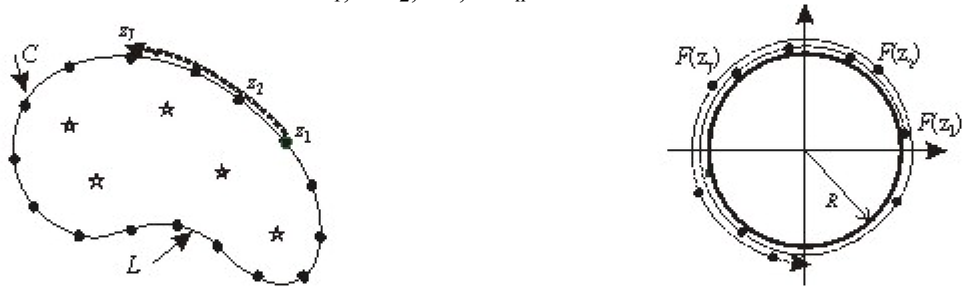
Другой подход основан на том, что квадрат модуля аппроксимирующего полинома $|F(z)|^2$ от комплексного аргумента z можно рассматривать как вещественный полином $P(x, y)$ от вещественных аргументов x и y. Поскольку функция $\ln F(z)$ является аналитической в окрестности точки z, ее вещественная часть, а, значит, и функция $\ln P(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа [1, 9], приводящему к условию на $P(x, y)$ вида:

$$P(x,y)\left[\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2}\right]-\left[\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)^2\right]=0$$

Можно доказать, что это условие является необходимым и достаточным для того, чтобы $P(x, y)$ представлял квадрат модуля некоторого комплексного полинома. Минимизация функционала с учетом этих ограничений дает систему уравнений относительно коэффициентов полинома $P(x, y)$ порядка 2. В этом смысле она проще системы (3).

Подход, реализованный в данной работе, основан на отображении лемнискаты на окружность, он приводит к линейной системе уравнений.

Метод фазовой окружности. Рассмотрим лемнискату L, заданную уравнением (1) и состоящую из одной связной компоненты. Пусть точка z совершает полный обход этой лемнискаты. При этом точка $F(z)$ описывает кривую на некоторой комплексной плоскости. Из (1) следует, что этой кривой является окружность с центром в точке 0 и радиусом R. Поскольку полином $F(z)$ имеет в области, окруженной лемнискатой, m корней, то из принципа аргумента [9] следует, что при обходе точкой z лемнискаты L точка $F(z)$ обходит эту окружность m раз. Образно говоря, полином *F(z)* "наматывает" лемнискату на окружность, по-разному растягивая различные ее фрагменты. Эти соображения приводят к новому подходу в задаче нахождения полинома $F(z)$. Если полином $F(z)$ таков, что в точках z_1, z_2, …, z_n задания аппроксимируемой кривой $|F(z_j)| \approx R$, то точки $F(z_j)$ приближенно можно считать лежащими на окружности радиуса R с центром в 0, причем аргумент последней из этих точек отличается от аргумента первой на $2\pi m$. Для приближенного нахождения полинома можно выбрать n точек w_1, w_2, …, w_n, принадлежащих единичной окружности с центром в 0, т.е. положить $w_j = e^{i\theta_j}$, где θ_j распределены некоторым образом на интервале [0, $2\pi m$], причем $\theta_j \le \theta_{j+1}$, и поставить задачу о нахождении полинома $F(z)$ такого, чтобы его значения в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ были бы возможно ближе к $Rw_1, Rw_2, \ldots, Rw_n$.



а) б)

Рис. 3. Отображение лемнискаты на фазовую окружность

Если, как и прежде, использовать в качестве критерия близости среднеквадратичный критерий, то задача сводится к нахождению комплексного полинома $F(z)$, минимизирующего функционал:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| F(z_j) - Rw_j \right|^2, \tag{4}$$

где $F(z)$ - аппроксимирующий полином с комплексными коэффициентами $c_k = a_k + ib_k$ и единичным старшим коэффициентом $c_m = 1$.

Можно считать $R = 1$, но отказаться от требования $c_m = 1$. Тогда, найдя полином $F(z)$, минимизирующий (4), следует перейти к полиному $(1/c_m)F(z)$ со старшим коэффициентом 1, который будет аппроксимировать точки $(1/c_m)w_1$, $(1/c_m)\, w_2, \ldots, (1/c_m)w_n$, лежащие на окружности радиуса $R = 1/|c_m|$.

Необходимые условия минимума многопараметрического выражения (4) можно получить, как и прежде, по методу наименьших квадратов, что приведет в результате к линейной системе из m уравнений по m комплексным параметрам $c_o, \ldots, c_{m-1}$:

$$\sum_{l=0}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} z_j^l \bar{z}_j^k \right) c_l = \sum_{j=1}^{n} w_j \bar{z}_j^k, \qquad k = 0,\ldots,m-1. \tag{5}$$

Решением ее будут значения m коэффициентов $c_o, \ldots, c_{m-1}$ аппроксимирующего полинома $F(z)$. Для применения изложенного метода необходимо правильно выбрать на окружности точки w или, что то же самое, определить последовательность углов θ_j.

Комплексный алгоритм. Метод фазовой окружности позволяет разработать алгоритм построения лемнискаты, аппроксимирующей заданную кривую, основанный на развиваемом здесь подходе к лемнискате как к линии уровня модуля комплексного полинома. Центральным вопросом алгоритмической разработки является определение положений точек w_j на единичной окружности, т.е. определение оптимальной фазировки отображения аппроксимируемой кривой на единичную окружность.

Поскольку в общем случае информации о расстановке на окружности точек w_j нет, то разработанный алгоритм состоит из последовательности итераций, каждая из которых, уточняя расположение точек w_j, дает лемнискаты, осуществляющие все более точное приближение заданной кривой. В качестве начальной фазировки естественно выбрать точки, равномерно расположенные на интервале $[0, 2\pi m]$, т.е. положить $w_j = e^{2\pi j/n}$, j=1,..., n. Итерационный цикл алгоритма состоит из следующих шагов:

1. По точкам аппроксимируемой кривой z_j и окружности w_j определяются коэффициенты c_k полинома $F(z)$ как решение системы уравнений (5).

2. По коэффициентам c_k строится полином $F(z)$.

3. Проверяется критерий качества приближения, например, L-критерий: если критерий удовлетворяется, алгоритм заканчивает свою работу.

3. В полученный полином $F(z)$ подставляются последовательно точки z_1, z_2, ..., z_n, в результате чего получается последовательность точек $F(z_1)$, $F(z_2)$, …, $F(z_n)$.

4. Найденные точки $F(z_1)$, $F(z_2)$, …, $F(z_n)$ нормируются, задавая на единичной окружности новую последовательность из n точек w_j, определяемых по формуле: $w_j=F(z_j)/|F(z_j)|$. После этого осуществляется переход к шагу 1.

Построенный алгоритм был реализован на ЭВМ.

Компьютерный эксперимент. Для проверки качества работы алгоритма были проведены на ЭВМ эксперименты по приближению различных кривых. На рис. 4 представлены фазы процесса аппроксимации пятифокусной лемнискаты. Смысл эксперимента по фокусному приближению лемнискаты состоит в том, что при приближении произвольных кривых трудно отделить ошибку, связанную с принципиальной неточностью приближения при ограниченном числе фокусов, от ошибки, связанной с недостаточной точностью работы алгоритма. Лемниската же может, естественно, быть приближена с любой точностью, поэтому качество ее приближения является хорошим тестом для оценки качества алгоритма. Как видно из рисунков, содержащих результаты приближения на первой (рис. 4а), третьей (рис. 4б) и пятой (рис. 4в) итерациях, процесс быстро сходится и дает хорошее приближение за несколько итераций.

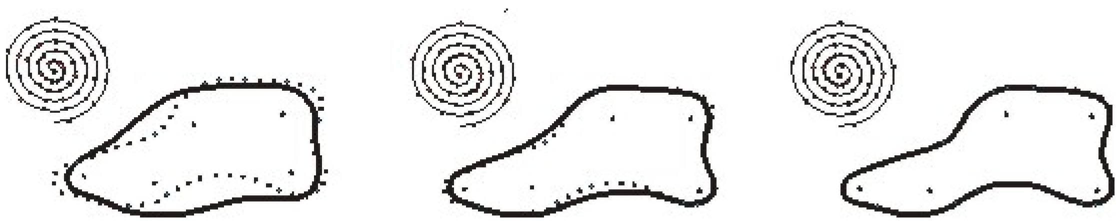


Рис. 4. Фазы работы комплексного алгоритма с иллюстрацией фазовой окружности

Основой работы алгоритма является итерационный поиск образов точек аппроксимируемой кривой на единичной окружности. Для иллюстрации этого процесса компьютерная программа, реализующая алгоритм, выводила на экран точки w_j фазовой окружности, изображая их условно на спирали, чтобы “витки лемнискаты” не накладывались друг на друга. На рис. 4 хорошо видно, как алгоритм, начиная с равномерно распределенных точек на фазовой окружности, перераспределяет их, приводя фазировку в соответствие с формой кривой.

Результат фокусной аппроксимации гармонической кривой с неизвестным числом фокусов показан на рис. 5 (кривая синтезирована по трем гармоникам). Алгоритм сходится практически после 5-й итерации, он использовал 4 фокуса, что эквивалентно тем же 12 степеням свободы, заложенным в трех гармониках кривой.

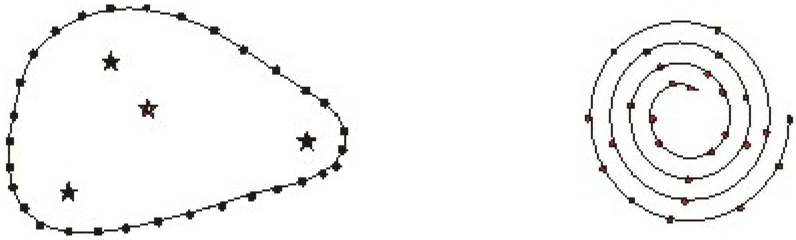


Рис. 5. Гармоническая кривая: результат приближения и фазировка

Еще один пример, изображенный на рис. 6, связан с приближением эмпирической кривой (представляющей собой сглаженный контур изображения на географической карте материка Африка). На рисунке показан результат аппроксимации ее с помощью шестифокусной лемнискаты.

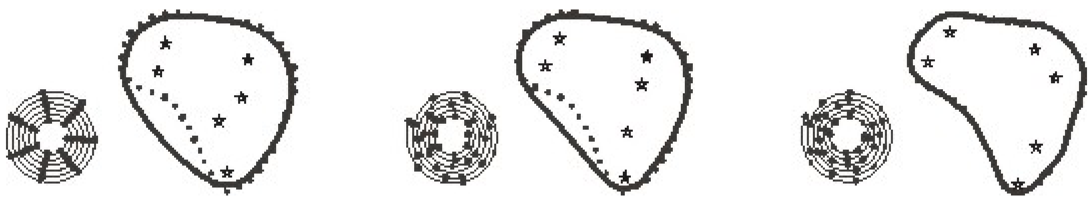


Рис. 6. Фазы приближения эмпирической кривой

Поиск фокусов. Поскольку результатом работы излагаемого алгоритма являются коэффициенты полинома, а целью исследования является нахождение фокусов, для окончательного решения задачи требуется определить корни найденного полинома, которые и являются фокусами. Вопрос о нахождении корней алгебраических уравнений трудности не составляет. Программная реализация алгоритма использовала простую процедуру нахождения корней, основанную на нахождении минимума модуля полинома по методу градиентного спуска. Координаты фокусов, найденные алгоритмом, для тестовых кривых фокусного происхождения (рис. 4) с высокой точностью соответствуют действительным их координатам.

Заключение. Сравнение фокусного метода приближения с гармоническим показало, что фокусное приближение требует примерно такое же число степеней свободы. Особенности же, присущие каждому методу, позволяют отдать предпочтение одному из них в зависимости от требований поставленной задачи. Отличительная особенность многофокусных лемнискат как класса приближающих функций в единстве пространства представления степеней свободы - фокусов с объектом аппроксимации – кривой, что допускает естественную интерпретацию как управления процессом аппроксимации, так и ее результатов. Это делает целесообразным использование фокусной аппроксимации в задачах, требующих интерпретации аппроксимационных степеней свободы [6]. Поскольку система фокусов содержит в интегрированном виде информацию о форме приближаемой кривой, найденное приближение может быть использовано как для сжатия информации, так и для описания особенностей этой формы. Другое направление применения фокусного приближения основано на отмеченном выше способе представления аппроксимируемой кривой уравнением (1), что позволяет легко решать задачи о принадлежности точки некоторой области, ограниченной лемнискатой, - классические задачи распознавания образов и принятия решений. Затронутые здесь вопросы теоретического обоснования метода представляются интересными и ожидают дальнейшего изучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркушевич А.И.*, Теория аналитических функций, т.1. М.: Наука, 1967, 486 с.
2. *Ракчеева Т.А.* Приближение кривых многофокусными лемнискатами // Человеко-машинные системы и анализ данных: Сб. науч. трудов. / Отв. редактор И.А.Овсеевич. - М.: Наука. 1992, - с. 93-110.
3. *Ракчеева Т.А.* Алгоритм фокусного приближения кривых // Человеко-машинные системы и анализ данных: Сб. науч. трудов. / Под ред. И.А.Овсеевича. - М.: Наука. 1992, - с. 111-129.
4. *Ракчеева Т.А.* Фокусная аппроксимация плоских кривых. Заключительный отчет Гос.рег. № 10.9.10011069, 1992.
5. *Ракчеева Т.А.* Приближение кривых: фокусы или гармоники. // Математика, компьютер, образование: Сб. науч. трудов. Том 2 / Под ред. Г.Ю.Ризниченко. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2007. – 392 с.
6. *Ракчеева Т.А.* Квазилемнискаты в задаче приближения. // Третьи Курдюмовские чтения. Синергетика в естественных науках: Материалы международной междисциплинарной научной конференции. – Тверь, 2007, - с. 113-117.
7. *Ракчеева Т.А.* Управление многофокусными степенями свободы в задаче формообразования. // Параллельные вычисления и задачи управления. Труды Международной научной конференции. Москва, ИПУ РАН, 2001.
8. *Хемминг Р.В.* Численные методы. Москва: Наука, 1968, 400 с.
9. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ, ч.1. Москва: Наука, 1976, 320 с.
10. *Hilbert D.* Gessamelte Abhandlungen, Berlin: Springer, 1935. Bd. 3, 435 s.

CURVES APPROXIMATION BY THE MULITYFOCAL LEMNISCATES ON A COMPLEX PLANE

Rakcheeva T. A.

The task of analytical approximation of the point-by-point given closed curves by the multifocal lemniscates on a complex plane is solved. The curve to be approximated is represented thus by a finite set of focus points inside a curve. The method for construction of approximating lemniscate as a level line of a complex polynomial modulus by mapping the curve to be approximated onto phase circle is developed and investigated