ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ СО СПЕКТРОМ ИЗ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА И ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОТРЕЗКА

Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н.

Рассматривается оптимальный метод простой итерации для порождающего оператора с собственными значениями разных знаков: одно отрицательное, а другие положительные. Отрицательное собственное значение задано, положительные собственные значения принадлежат отрезку. Оптимальный метод по норме C ищется в классе двухпараметрического семейства метода простой итерации

Изучаются методы решения системы линейных уравнений

$$\mathbf{Ax = b}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — действительная квадратная матрица размерности $\mathbf{m \times m}$, $\mathbf{m}$ — целое, $\mathbf{m \geq 1}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ — вектора-столбцы из $\mathbf{R^m}$.

Определение 1. Будем говорить, что матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию (W), если все собственные значения $\boldsymbol{\lambda_k(A)}$ матрицы $\mathbf{A}$ — действительные, некратные и принадлежат множеству $\mathbf{W = \{-s\} \cup [\mu,M]}$, $\mathbf{0 < s}$, $\mathbf{0 < \mu < M}$.

Теорема 1. Пусть действительная квадратная матрица $\mathbf{A}$ размера $\mathbf{m \times m}$ удовлетворяет условию (W), тогда она невырождена, т.е. определитель $\mathbf{det\ A}$ матрицы $\mathbf{A}$ отличен от нуля.

Доказательство. Для любой действительной квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размера $\mathbf{m \times m}$ определитель $\mathbf{det\ A}$ равен произведению всех собственных значений $\boldsymbol{\lambda_k(A)}$ по $\mathbf{k}$ от $\mathbf{1}$ до $\mathbf{m}$, см. [1]. Множество $\mathbf{W}$ не содержит ноль, поэтому каждое собственное значение $\boldsymbol{\lambda_k(A)}$ отлично от нуля. Произведение конечного числа отличных от нуля сомножителей отлично от нуля.

Теорема 2. Пусть матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию (W). Тогда решение линейной системы (1), существует и единственно.

Доказательство. По теореме 1 если матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию (W), то она невырождена, а для таких матриц теорема 2 доказана в [1].

Определение 2. Двухпараметрическим методом простой итерации с параметрами $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ называется метод построения последовательности $\mathbf{x^n}$ вектор-столбцов из $\mathbf{R^m}$ по формуле:

$$\mathbf{x^{n+1} = Bx^n - Cb},\ \ \mathbf{n = 0,1,\ldots},\ \mathbf{B = E+\alpha A+\beta A^2},\ \mathbf{C = \alpha E+\beta A}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\alpha,\beta}$ — действительные числа, $\boldsymbol{\beta}$ отлично от нуля, $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Положим $\boldsymbol{\theta(\alpha,\beta,\lambda) = 1 + \alpha\lambda + \beta\lambda^2}$, $\mathbf{q(\alpha,\beta) = sup_{\lambda \in W}\, |\theta(\alpha,\beta,\lambda)|}$.

Теорема 3. Пусть матрица $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию (W). Тогда все собственные значения $\boldsymbol{\lambda_k(B)}$ матрицы $\mathbf{B}$ имеют следующий вид: $\boldsymbol{\lambda_k(B) = \theta(\alpha,\beta,\lambda_k(A))}$, $\mathbf{m \geq k \geq 1}$.

Доказательство. Пусть вектор-столбец $\mathbf{v_k}$ из $\mathbf{R^m}$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$ и пусть $\boldsymbol{\lambda_k(A)}$ из $\mathbf{R}$ является соответствующим $\mathbf{v_k}$ собственным значением, т.е. $\mathbf{Av_k} = \boldsymbol{\lambda_k(A)v_k}$. Умножим последнее равенство слева на матрицу **A** и воспользуемся линейностью этого умножения, тогда $\mathbf{A^2v_k} = \boldsymbol{\lambda_k(A)Av_k} = \boldsymbol{\lambda_k(A)\lambda_k(A)v_k} = \boldsymbol{(\lambda_k(A))^2v_k}$. Значит, вектор-столбец $\mathbf{v_k}$ будет собственным вектором для матрицы $\mathbf{A^2}$ с собственным значением $\boldsymbol{\lambda_k(A^2) = \lambda_k^2(A)}$. Для единичной матрицы **E** любой вектор-столбец **v** является собственным вектором с собственным значением $\boldsymbol{\lambda(E) = 1}$. Любая линейная комбинация **E**, **A**, $\mathbf{A^2}$ будет иметь собственным вектором $\mathbf{v_k}$, в частности, и матрица **B** с собственным значением $\boldsymbol{\lambda_k(B)}$ равным $\boldsymbol{\theta(\alpha,\beta, \lambda_k(A))}$.

Теорема 4. Пусть $\boldsymbol{q(\alpha,\beta) < 1}$ и матрица **A** удовлетворяет условию (W). Тогда итерационный процесс (2) сходится.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{q(\alpha,\beta) < 1}$, тогда все собственные значения $\boldsymbol{\lambda_k(B)}$, $\mathbf{m \geq k \geq 1}$, матрицы **B** удовлетворяют условию $\boldsymbol{|\lambda_k(B)| < 1}$. Доказательство сходимости итерационного процесса (2) при $\boldsymbol{|\lambda_k(B)| < 1)}$, $\mathbf{m \geq k \geq 1}$ приведено в [2].

Теорема 5. Пусть последовательность **(2)** сходится к пределу $\mathbf{x^*}$. Если $\boldsymbol{\beta}$ не равно нулю и $\boldsymbol{\lambda(A)}$ не равно $\boldsymbol{-\alpha/\beta}$, то вектор-столбец $\mathbf{x^*}$ из $\mathbf{R^m}$ является решением линейной системы (1).

Доказательство. Перейдем к пределу в левой и правой части формулы (2). Получим $\mathbf{CAx^* = Cb}$. Докажем, что матрица **C** невырождена. Предположим, что **C** вырождена, тогда существует такой ненулевой вектор-столбец **u** из $\mathbf{R^m}$, что $\mathbf{Cu = 0}$, т.е. $\boldsymbol{\alpha u + \beta Au = 0}$. Поэтому вектор-столбец **u** является собственным вектором для матрицы **A** с собственным значением $\boldsymbol{\lambda(A) = -\alpha/\beta}$, при $\boldsymbol{\beta \neq 0}$. Полученное противоречие с условием теоремы доказывает невырожденность **C**.

Так как оператор **C** не вырожден, то существует оператор $\mathbf{C^{-1}}$. Применим $\mathbf{C^{-1}}$ к левой и правой части $\mathbf{CAx^* = Cb}$, получим $\mathbf{Ax^* = b}$. Поэтому $\mathbf{x^*}$ является решением линейной системы (1).

Теорема 6. Пусть матрица **A** удовлетворяет условию (W) и $\boldsymbol{q(\alpha,\beta) < 1}$. Тогда $\boldsymbol{\lambda(A)}$ не равно $\boldsymbol{-\alpha/\beta}$.

Доказательство. Предположим, что $\boldsymbol{\lambda(A) = -\alpha/\beta}$, тогда $\boldsymbol{\lambda(B) = 1}$, что противоречит условию $\boldsymbol{q(\alpha,\beta) < 1}$.

Из теорем 4,5,6 следует теорема 7.

Теорема 7. Пусть матрица **A** удовлетворяет условию (W) и $\boldsymbol{q(\alpha,\beta) < 1}$. Тогда двухпараметрический метод простой итерации (2) сходится к решению системы (1).

Определение 3. Сходящийся двухпараметрический метод простой итерации (2) с параметрами $\boldsymbol{\alpha_0}$, $\boldsymbol{\beta_0}$ называется оптимальным, если $\boldsymbol{q(\alpha_0,\beta_0) = \inf_{\alpha,\beta} q(\alpha,\beta)}$, где $\boldsymbol{\beta}$ отлично от нуля и $\boldsymbol{q(\alpha_0, \beta_0) \neq 0}$.

Теорема 8. Пусть $\boldsymbol{\beta_0 = -2/(\mu s+Ms-\mu M+M^2)}$ и $\boldsymbol{\alpha_0 = (s-\mu)\beta_0}$. Тогда $\boldsymbol{|\theta(\alpha_0,\beta_0,\lambda)|}$ достигает своего максимального значения $\boldsymbol{1 + \mu s\beta_0}$ в трех точках границы **W**, т.е. при $\boldsymbol{\lambda = -s}$, $\boldsymbol{\lambda = \mu}$ и $\boldsymbol{\lambda = M}$.

Доказательство. Функция $\boldsymbol{\theta(\alpha_0,\beta_0,\lambda)}$ по $\boldsymbol{\lambda}$ является квадратной параболой с вершиной при $\boldsymbol{\lambda = \lambda_0 = (\mu - s)/2}$, лежащей вне множества **W**. Функция $\boldsymbol{\theta(\alpha_0,\beta_0,\lambda)}$ при $\boldsymbol{\lambda > \lambda_0}$ строго монотонно убывает, т.е. $\boldsymbol{\theta(\alpha_0,\beta_0,M) < \theta(\alpha_0,\beta_0,\lambda) < \theta(\alpha_0,\beta_0, \mu)}$ при $\boldsymbol{\mu < \lambda < M}$. Подставляя $\boldsymbol{\alpha_0 = (s-\mu)\beta_0}$ в формулу $\boldsymbol{\theta(\alpha_0,\beta_0,\lambda)}$ для $\boldsymbol{\lambda}$, совпадающих с граничными точками **W**, получаем $\boldsymbol{\theta(\alpha_0,\beta_0,-s) = \theta(\alpha_0,\beta_0,\mu) = 1+\mu s\beta_0 > 0}$, $\boldsymbol{\theta(\alpha_0,\beta_0,M) = 1+(Ms-\mu M+M^2)\beta_0 = -1 - \mu s\beta_0}$. Поэтому функция $|\theta(\alpha_0,\beta_0,\lambda)|$ **достигает** на множестве **W** своих максимальных значений в точках $\lambda = -s$, $\lambda = \mu$ **и** $\lambda = M$.

Теорема 9. Пусть матрица **A** удовлетворяет условию (W). Тогда двухпараметрический метод простой итерации (2) с $\beta_0 = - 2/(\mu s+Ms-\mu M+M^2)$, $\alpha_0 = (s-\mu)\beta_0$ сходится к решению системы (1) и является оптимальным, причем $(\alpha_0 , \beta_0) = 1 + \mu s\beta_0$.

Доказательство. Из теоремы 8 получаем $q(\alpha_0,\beta_0) = \sup_{\lambda\in W} |\theta(\alpha,\beta,\lambda)| = 1 + \mu s\beta_0 > 0$.

Докажем теперь оптимальность метода. Предположим, что рассматриваемый двухпараметрический метод простой итерации не является оптимальным, т.е. существуют такие вещественные значения α_1 и β_1 такие, что

$$q(\alpha_1,\beta_1) < q(\alpha_0,\beta_0). \tag{3}$$

Подставляя последовательно значения λ равные соответственно $- s$, μ и M в (3) и учитывая свойства α_0 **и** β_0, получим следующие неравенства

$$- 1 + s\alpha_0 - s^2\beta_0 < 1 – s\alpha_1 +s^2\beta_1 < 1 – s\alpha_0 +s^2\beta_0, \tag{4}$$

$$- 1 - \mu\alpha_0 - \mu^2\beta_0 < 1 + \mu\alpha_1 + \mu^2\beta_1 < 1 + \mu\alpha_0 + \mu^2\beta_0, \tag{5}$$

$$1 + M\alpha_0 + M^2\beta_0 < - 1 - M\alpha_1 - M^2\beta_1 < - 1 - M\alpha_0 - M^2\beta_0. \tag{6}$$

Вычитая из всех частей неравенств (4) и (5) единицу и прибавляя ко всем частям неравенства (6) единицу, получим

$$- 2 + s\alpha_0 - s^2\beta_0 < – s\alpha_1 +s^2\beta_1 < – s\alpha_0 + s^2\beta_0, \tag{7}$$

$$- 2 - \mu\alpha_0 - \mu^2\beta_0 < \mu\alpha_1 + \mu^2\beta_1 < \mu\alpha_0 + \mu^2\beta_0, \tag{8}$$

$$2 + M\alpha_0 + M^2\beta_0 < - M\alpha_1 - M^2\beta_1 < - M\alpha_0 - M^2\beta_0. \tag{9}$$

Умножив неравенства (7) на μ, неравенства (8) на **s** и сложив их, получим неравенства

$$-2(\mu + s) – \mu s(\mu + s)\beta_0 < \mu s (\mu + s)\beta_1 < \mu s(\mu + s)\beta_0. \tag{10}$$

Так как $\mu s(\mu + s) > 0$, то (10) эквивалентно неравенству

$$- (\beta_0 + 2/ (\mu s)) < \beta_1 < \beta_0. \tag{11}$$

Умножив неравенства (8) на M, неравенство (9) на μ и сложив их, получим неравенство

$$-2(M - \mu) + \mu M(M - \mu)\beta_0 < - \mu M(M - \mu)\beta_1 < - \mu M(M - \mu)\beta_0. \tag{12}$$

Так как $0 < \mu < M$, то $- \mu M(M - \mu) < 0$ и неравенства (12) эквивалентны неравенствам

$$- \beta_0 + 2/(\mu M) > \beta_1 > \beta_0. \tag{13}$$

Из неравенств (11) следует, что $\beta_1 < \beta_0$, а из неравенств (13) следует, что $\beta_1 > \beta_0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Частный случай теоремы 9 при $\alpha_0 = 1/7$, $\beta_0 = - 1/7$, $s = 1$, $\mu = 2$ и $M = 4$ рассмотрен в работе [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00511).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, Гл. ред. Физ-Мат. Лит., 1971. 432 с.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. Учебное пособие. М.: Наука, Гл. ред. Физ-Мат. Лит., 1987. 600 с.
3. *Сорокин П.Н., Ченцова Н.Н.* Об оптимальной скорости сходимости некоторой последовательности // Сб. научных трудов 14 – ой конференции “Математика. Компьютер. Образование”, под ред. Г.Ю.Ризниченко. Москва - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007, Т. 2. С. 111 – 117.

OPTIMUM METHOD OF SIMPLE ITERATION GENERATED BY OPERATOR WITH ALL POSITIVE EIGEN VALUES EXCEPT ONE NEGATIVE VALUE

Sorokin P. N., Chentsova N. N.

Optimum method of simple iteration for generating operator with eigen values of different sings: one negative and other positive is obtained. Negative value is given, positive values belong to segment. Optimum method in norm C is searched out in the class of two-parametric family of methods of simple iteration