ОБ УСЛОВИЯХ И МЕТОДАХ СПРЯМЛЯЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕШЕСТУГОЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТКАНЕЙ. К ГИПОТЕЗЕ В. БЛЯШКЕ

Рудаков Б. П.

Изучен специальный класс нешестиугольных 4-тканей, имеющих важное прикладное значение. Найдены условия и эффективные методы их спрямляемости, исследован вопрос единственности. Показано, что известная гипотеза В.Бляшке не находит подтверждения

Пусть совокупность четырех семейств поверхностей

$$t_j\left(x, y, z\right) = t_j = const \left(j=1\div 4\right) \tag{1}$$

определяет ткань трехмерного пространства. Известно [1], что исключение x,y,z из (1) приводит к уравнению ткани. Возьмем его в виде

$$t_4 = f\left(t_1, t_2, t_3\right). \tag{2}$$

В статье рассматривается случай, когда ткань с уравнением (2) спрямляется в ткань, образованную семейством плоскостей t_2, принадлежащих связке, и тремя пучками плоскостей t_1, t_3, t_4, таких, что семейства плоскостей t_1, t_2 принадлежат одной связке, пучки плоскостей t_3, t_4 – другой. Это равносильно представлению уравнения (2) в виде уравнения Массо,

$$\begin{vmatrix} f_{i1}\left(t_i\right) & , & 0 & , & f_{i2}\left(t_i\right) & , & 1 \\ f_{k1}\left(t_k\right) & , & f_{k2}\left(t_k\right), & & 0 & , & 1 \end{vmatrix} = 0 \left(i=1, 2;\ k=3,4\right), \tag{3}$$

в котором элементы второй строки линейно-независимы. Такую ткань обозначим T_2.

Справедлива [2] следующая

Теорема 1. *Существует точно пять проективно различных (с точностью до параметризации плоскостей) тканей T_2.*

При доказательстве теоремы рассмотрена проективность графов тканей, образованных тремя носителями пучков семейств плоскостей ткани T_2, пересекающиеся с их общей секущей – прямой α. При этом два графа называем проективными, если существует коллинеация пространства, переводящая прямые одного графа в соответствующие прямые другого графа. Из проективности двух тканей T_2 следует проективность их графов; обратное, вообще говоря, не имеет места.

Каждое из уравнений Массо (3) при условии, что элементы его второй строки линейно независимы, может быть представлено в виде

$$\Psi\left(F_1, F_2, F_3, F_4, \Phi_2\right) = 0 \left(j = 1-4\right), \tag{4}$$

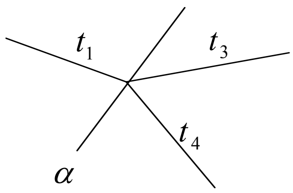
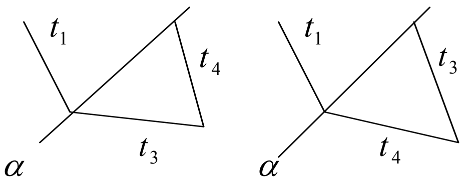
где $F_j \equiv F_j\left(t_j\right)$, $\Phi_2 \equiv \Phi_2\left(t_2\right)$ и Ψ – линейная функция относительно каждой из переменных F_j, Φ_2.

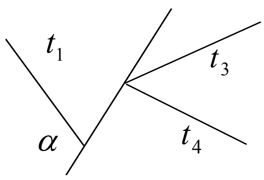
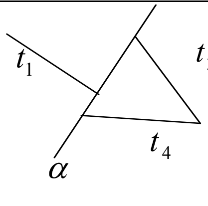
Теорема 2. *Существует не более четырёх канонических форм* (4) *уравнений* (2), *представимых тканями* T_2:

$$\begin{array}{lll|lll} I_{(2)} \ldots & F_1F_2+\Phi_2=F_3+F_4 & & III_{(2)} \ldots & F_1F_2+\Phi_2=\dfrac{1}{F_3+F_4} \\ II_{(2)} \ldots & F_1F_2+\Phi_2=F_3F_4 & & IV_{(2)} \ldots & F_1F_2+\Phi_2=\dfrac{1}{F_3F_4+1} \end{array}$$

В справедливости теоремы нетрудно убедиться, рассмотрев уравнения (3) проективно различных графов тканей T_2 (табл.1).

Таблица 1. Графы тканей и соответствующие канонические формы

<table>
<tr><th>№/№</th><th>Графы тканей T_2</th><th>Канонические формы</th></tr>
<tr><td>$I_{(2)}$</td><td>
</td><td>$F_1F_2+\Phi_2=F_3+F_4$</td></tr>
<tr><td>$II_{(2)}$</td><td>

(A) (B)</td><td>$F_1F_2+\Phi_2=F_3F_4$</td></tr>
<tr><td>$III_{(2)}$</td><td>
</td><td>$F_1F_2+\Phi_2=\dfrac{1}{F_3+F_4}$</td></tr>
<tr><td>$IV_{(2)}$</td><td>
</td><td>$F_1F_2+\Phi_2=\dfrac{1}{F_3F_4+1}$</td></tr>
</table>

Вопросы спрямляемости пространственных тканей рассматривались многими авторами. Среди полученных важных результатов не содержится эффективных условий и методов получения указанного представления (3). Не решена и проблема единственности. Заметим, что приведенным в данной статье методам исследования во многом способствовали идеи П.В.Николаева [3], посвященные уравнениям с тремя переменными.

В дальнейшем будем считать, что однозначная функция $f\left(t_1, t_2, t_3\right)$ обладает в некотором параллелепипеде *G* непрерывными частными производными достаточно высокого порядка и отличными от нуля производными $\dfrac{\partial f}{\partial t_j} \equiv f_j^{/}\left(j=1-3\right)$. Таким образом, используемые далее функции

$$M=-\frac{\partial f}{\partial t_2}:\frac{\partial f}{\partial t_1},\ \bar{M}=-\frac{\partial f}{\partial t_3}:\frac{\partial f}{\partial t_1}. \tag{5}$$

будут достаточно гладкими и не обращающимися в нуль в точках области *G*. Кроме того, полагаем, что функции f_{jr} уравнения (3) обладают производными необходимого порядка.

Укажем [4] предварительное условие представимости уравнения (2) тканью (3), у которой только семейство плоскостей t_4 образует пучок. Такую ткань обозначим T.

Для удобства введём следующие обозначения элементов определителя (3): $f_{ij} \equiv f_{ij}\left(t_i\right)$.

Лемма. *Уравнение (2) тогда и только тогда представимо тканью T, когда при заданных функциях* $M, \bar{M}$ (5) *существует решение относительно функций* $f_{jr}\left(j=1\div 3; r=1,2\right)$ *следующей системы дифференциальных уравнений:*

$$\left.\begin{aligned}
&M=\frac{f_{12}\left[\left(f_{11}-f_{21}\right)\left(f_{22}\right)_2^{/}-\left(f_{12}-f_{22}\right)\left(f_{21}\right)_2^{/}\right]}{f_{22}\left[\left(f_{11}-f_{21}\right)\left(f_{12}\right)_1^{/}-\left(f_{12}-f_{22}\right)\left(f_{11}\right)_1^{/}\right]},\\
&\bar{M}=\frac{\left(f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21}\right)\left\{\left(f_{11}f_{22}-f_{12}f_{21}\right)\left(f_{32}\right)_3^{/}+\left(f_{12}-f_{22}\right)\left[f_{31}\left(f_{32}\right)_3^{/}-f_{32}\left(f_{31}\right)_3^{/}\right]\right\}}{f_{22}\left[\left(f_{11}-f_{21}\right)\left(f_{12}\right)_1^{/}-\left(f_{12}-f_{22}\right)\left(f_{11}\right)_1^{/}\right]f_{31}f_{32}}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Теорема 3. *Для представления уравнения* (2) *тканью* T_2 *необходимо, чтобы функции* $M, \bar{M}$ (5) *удовлетворяли условиям:*

$$M_3^{/}=0,\quad \left(\ln M\right)_{12}^{//}\neq 0,\ \left(\ln \bar{M}\right)_{13}^{//}=0. \tag{7}$$

В необходимости условий (7) легко убедиться, рассмотрев уравнения (6), причём, $\left(\ln M\right)_{12}^{//}\neq 0$ в силу наложенных выше условий на функцию $f\left(t_1, t_2, t_3\right)$ в области G.

В теоремах 1, 2 показано, что каждому из графов ткани T_2 отвечает, по меньшей мере, одна из канонических форм $I_{(2)}-IV_{(2)}$. Для определённости, проведём исследования для случая, когда двойственный образ спрямленной пространственной ткани T_2 даёт ткани с графами, относящиеся к канонической форме $II_{(2)}$ (см. табл.1).

Для дальнейшего введём следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &A\equiv\left(\ln\frac{M}{\bar{M}}\right)_1^{/},\ B\equiv\left(\ln MA\right)_1^{/},\ D\equiv+\sqrt{B\left(\ln M\bar{M}AB\right)_1^{/}},\ F\equiv\frac{\left(\bar{M}AB\right)_2^{/}}{2\bar{M}\left(\ln M\right)_{12}^{//}},\\ &P\equiv\frac{1}{2}\left[1+\frac{\left(M\bar{M}AB\right)_1^{/}+\left(\bar{M}AB\right)_2^{/}}{\bar{M}D\left(\ln M\right)_{12}^{//}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Теорема 4. *Для представления уравнения (2) тканью T_2 с любым из двух графов, относящихся к форме $II_{(2)}$, необходимо, чтобы в области G помимо условий (7), выполнялись и условия:*

$$\left(\ln\bar{M}B\right)_j^{/}=0\ (j=1,2)\,. \tag{9}$$

Рассмотрим уравнение (3) в виде, определяющем ткань с графом (A) (табл. 1). После надлежащих проективных преобразований его можно взять в виде, в котором

$$f_{11}=0,\ f_{32}=1,\ f_{41}=0\,, \tag{3*}$$

где для удобства введены обозначения: $f_i\equiv f_{ij}\left(t_i\right),\ f_{2j}\equiv f_{2j}\left(t_2\right)$.

Тогда уравнения системы (6) примут вид:

$$M=\frac{f_1\left[\left(f_1-f_{22}\right)\left(f_{21}\right)_2^{/}+f_{21}\left(f_{22}\right)_2^{/}\right]}{\left(f_1\right)_1^{/}f_{21}f_{22}},\ \bar{M}=-\frac{f_1\left(f_1-f_{22}\right)\left(f_3\right)_3^{/}}{\left(f_1\right)_1^{/}f_{22}f_3}\,. \tag{10}$$

Выполнимость условий (7) следует из теоремы 3. Далее, записав систему уравнений (10) в виде системы уравнений в частных производных, и дополнив последнюю до канонического вида [5] с помощью условий интегрируемости $\left(y_3\right)_j^{/}=0\ (j=1,2)$, получим:

$$\left(f_i\right)_j^{/}=\delta_i^j\cdot y_i\,,\ \left(f_{2k}\right)_j^{/}=\delta_i^j\cdot y_{2k}\,,\ \left(y_1\right)_1^{/}=\frac{y_1^2\cdot\left(2f_1-f_{22}\right)}{f_1\cdot\left(f_1-f_{22}\right)}-y_1\cdot\left(\ln\bar{M}\right)_1^{/}, \tag{11}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &y_{21}=\frac{y_1\cdot f_{21}\cdot f_{22}}{f_1\cdot\left(f_1-f_{22}\right)}\cdot M+\frac{f_{21}\cdot f_{22}}{f_1}\cdot\left(\ln\bar{M}\right)_2^{/},\\ &y_{22}=\frac{(f_{22}-f_1)\cdot f_{22}}{f_1}\cdot\left(\ln\bar{M}\right)_2^{/},\ y_3=\frac{y_1\cdot f_{22}\cdot f_3}{f_1\cdot\left(f_{22}-f_1\right)}\cdot\bar{M} \end{aligned}\right\}, \tag{12}$$

δ_i^j – символ Кронекера, $\left(i=1,3;\ k=1,2;\ j=1-3\right)$.

Из условия интегрируемости $\left(y_1\right)_{12}^{//}=0$ системы (11) найдём новое уравнение, связывающее неизвестные функции этой системы:

$$\frac{y_1 f_{22}}{f_1\left(f_1-f_{22}\right)}=-B. \tag{13}$$

Дифференцируя это уравнение отдельно по $t_j\left(j=1,2\right)$ и используя уравнения (11) и условия (7), получим условия (9).

Теорема 5. *Условия теоремы* 4 *являются не только необходимыми, но и достаточными для представления уравнения* (2) *тканью* T_2 *с любым из графов, приводящих к канонической форме* $II_{(2)}$. *При этом уравнение (2) допускает, с точностью до коллинеаций пространства, единственную ткань с каждым из этих графов, и элементы этих тканей находятся с помощью лишь квадратур.*

Продолжаем рассматривать ткань T_2 с графом (А) с уравнением (3*). Система уравнений (10) допускает четырёхпараметрическую группу

$$\bar{f}_1=\frac{a_{33}f_1}{a_{43}f_1+1},\ \bar{f}_{21}=\frac{a_{11}f_{21}}{a_{43}f_{22}+1},\ \bar{f}_{22}=\frac{a_{33}f_{22}}{a_{43}f_{22}+1},\ \bar{f}_3=\frac{a_{11}f_3}{a_{22}}, \tag{14}$$

а именно, подгруппу коллинеаций пространства, автоморфных относительно плоскостей $y=0,\ z=0$ и прямых: $\left.\begin{matrix}x=0,\\ y=0\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=1,\\ z=0\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=0,\\ z=0\end{matrix}\right\}.$

Группа (14) позволяет присоединить начальные условия; возьмём их в виде:

при $t_i=t_{i1}$, $f_j=1,\ f_{21}=1,\ f_{22}=2\ \left(i=1-3;\ j=1,3\right)$ (15)

где $t_i=t_{i1}$ – любая точка области *G*.

С помощью уравнения (13) перейдём от системы (11) к эквивалентной системе, но не содержащей справа функции y_1:

$$\left(f_i\right)_j^{/}=\delta_i^j\cdot y_i,\left(f_{2k}\right)_j^{/}=\delta_i^j\cdot y_{2k}\ \left(i=1,3;k=1,2;j=1\text{-}3\right), \tag{16}$$

где

$$y_1=-\frac{f_1\left(f_1-f_{22}\right)}{f_{22}}B, \tag{13*}$$

$$y_{21}=-f_{21}MB+\frac{f_{21}\cdot f_{22}}{f_1}\cdot\left(\ln\bar{M}\right)_2^{/}, y_3=f_3\bar{M}B, \tag{17}$$

y_{22} есть (12).

Нетрудно проверить, что при условиях (7), (9) система уравнений (16) является вполне интегрируемой. Следовательно, соответствующая система уравнений Пфаффа является вполне интегрируемой. Такая система при заданных начальных условиях имеет решение, и оно единственное [6].

При условиях (15) из уравнения (13*) найдётся функция f_1:

$$f_1 = 2\Big/\left(1 + \exp\left(-\int_{t_{11}}^{t_1} B^{02}\, dt_1\right)\right), \text{где} \left[W\left(t_i, t_j, t_k\right)\right]^{0j} \equiv W\left(t_i, t_{j1}, t_k\right) \tag{18}$$

Из остальных уравнений системы (16) при начальных условиях (15) найдутся (однозначно и квадратурами) функции f_{21}, f_{22}, f_3:

$$\left.\begin{aligned} & f_{21} = \exp\int_{t_{21}}^{t_2} M\left(\frac{f_{22}}{f_1}A - B\right) dt_2,\ f_{22} = 1\Big/\left(1 - \frac{1}{2}\exp\int_{t_{21}}^{t_2}\left(MA\right)^{01} dt_2\right), \\ & f_3 = \exp\int_{t_{31}}^{t_3} \bar{M} B\, dt_3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Из полученных результатов следует, во-первых, что условия (7), (9) являются не только необходимыми, но и достаточными (в силу леммы); во-вторых, ткань T_2 с графом (А) определяется, с точностью до коллинеаций пространства, однозначно, наконец, элементы ткани определяются с помощью лишь квадратур.

Рассмотрим теперь ткань T_2 с графом (В), причём, не нарушив общности, рассмотрим ткань, в уравнении (3) которой

$$f_{11} = 0,\ f_{31} = 0,\ f_{42} = 1. \tag{3**}$$

Уравнения (6) в этом случае примут вид:

$$M = \frac{f_1\left[\left(f_1 - f_{22}\right)\left(f_{21}\right)_2^{/} + f_{21}\left(f_{22}\right)_2^{/}\right]}{\left(f_1\right)_1^{/} f_{21} f_{22}},\ \bar{M} = \frac{f_1\left(f_1 - 1\right)\left(f_3\right)_3^{/}}{\left(f_1\right)_1^{/} f_{22} f_3\left(f_3 - 1\right)} \tag{20}$$

Нетрудно показать, что система (20) допускает четырёхпараметрическую группу преобразований:

$$\bar{f}_1 = \frac{a_{33} f_1}{a_{43} f_1 + 1},\ \bar{f}_{21} = \frac{a_{11} f_{21}}{a_{43} f_{22} + 1},\ \bar{f}_{22} = \frac{a_{33} f_{22}}{a_{43} f_{22} + 1},\ \bar{f}_3 = \frac{a_{22} f_3}{\left(a_{22} - 1\right) f_3 + 1}, \tag{21}$$

позволяющую задать начальные условия в виде:

$$\text{при } t_i = t_{i1}\text{: } f_1 = 1,\ f_{21} = 1,\ f_{22} = 2,\ f_3 = -1\ \left(i = 1 - 3\right), \tag{22}$$

где $t_i = t_{i1}$ – любая точка области G.

Аналогично тому, как это проделано в предыдущем случае, система (20) при условиях (7), (9) приводится к вполне интегрируемой системе Пфаффа. Решая её при условиях (22), найдём, что функции f_1, $f_{2j}\left(j=1,2\right)$ выражаются соответствующими формулами (18), (19); функция f_3 находится по формуле

$$f_3=1\Bigg/\left(1-2\exp(-\int_{t_{31}}^{t_3}\bar{M}B\,dt_3)\right). \tag{23}$$

Следовательно, ткань T_2 с графом (В) определяется, с точностью до коллинеаций, единственным образом.

Заметим, что рассмотренные ткани T_2, соответственно, с графами (А) и (В), не проективны (теорема 1). Однако, если известны элементы одной из них, то можно указать элементы другой. Действительно, если f_i, $f_{2j}\left(i=1,3;\ j=1,2\right)$ – элементы ткани T_2 с уравнением (3*), а $f_i^{(2)}$, $f_{2j}^{(2)}$ – элементы ткани с уравнением (3**), то имеем:

$$f_1^{(2)}=f_1,\ f_{2j}^{(2)}=f_{2j},\ f_3^{(2)}=\frac{f_3}{f_3-2},\ \left(j=1,2\right). \tag{24}$$

Эти преобразования не могут быть получены из (14) или (21), что ещё раз говорит о непроективности рассмотренных тканей.

Таким образом, для нешестиугольных 4-тканей вида T_2 гипотеза В.Бляшке [1]: *“образованная поверхностями ткань, не являющаяся шестиугольной, допускает (с точностью до коллинеаций) не больше одной реализации в виде ткани из плоскостей”* [1, с.111] не получает подтверждения.

Аналогичными исследованиями получены условия и указаны методы представления уравнения (2) тканью T_2 с любым графом, приводящим к каноническим формам $I_{(2)}, III_{(2)}, IV_{(2)}$. Некоторые результаты исследований приведены в таблице 2.

В теореме 2 было доказано о существовании не более четырёх канонических форм уравнений (2), представимых номограммой T_2. Справедлива

Теорема 6. *Существуют точно четыре канонические формы* $I_{(2)}-IV_{(2)}$ *уравнений (2), представимых тканью* T_2.

Предварительно заметим, что указанные в таблице 2 условия представимости уравнения (2) тканями T_2 можно рассматривать как условия приводимости уравнения (2) к соответствующим каноническим формам [7].

Опираясь на условия представимости (табл.2), нетрудно показать, что если уравнение (2) приводится к какой-нибудь из форм $I_{(4)}-IV_{(4)}$, то оно не приводится ни к какой другой из них, т.е. справедливо

Следствие. *Если уравнение (2) представимо нешестиугольной тканью* $T_{(2)}$, *то оно приводится к одной и только к одной из канонических форм* $I_{(2)}-IV_{(2)}$.

Таблица 2. Условия спрямляемости тканей

<table>
<tr><td>№/№</td><td>Канонические формы</td><td colspan="2">Необходимые и достаточные условия представимости</td></tr>
<tr><td>$I_{(2)}$</td><td>$F_1F_2+\Phi_2=F_3+F_4$</td><td rowspan="4">$\left(\ln M\right)^{//}_{12}\neq 0$,
$M^{/}_3=0$,
$\left(\ln\bar{M}\right)^{//}_{13}=0$</td><td>$B=0$</td></tr>
<tr><td>$II_{(2)}$</td><td>$F_1F_2+\Phi_2=F_3F_4$</td><td>$\left(\ln\bar{M}B\right)^{/}_{j}=0\ \left(j=1{,}2\right)$</td></tr>
<tr><td>$III_{(2)}$</td><td>$F_1F_2+\Phi_2=\dfrac{1}{F_3+F_4}$</td><td>$F^2-AF+\frac{1}{2}AB=0$, $\left(\ln\bar{M}F\right)^{/}_{1}=-F$,
$\left(\ln\bar{M}F\right)^{/}_{2}=+MF$</td></tr>
<tr><td>$IV_{(2)}$</td><td>$F_1F_2+\Phi_2=\dfrac{1}{F_3F_4+1}$</td><td>$\left(\ln\bar{M}D\right)^{/}_{j}=0\left(j=1{,}2\right)$,
$P^2-P\dfrac{A+D}{D}+\dfrac{A\left(B+D\right)}{2D^2}=0$,
$\left[\ln\left(P-1\right)\right]^{/}_{1}=-DP$, $\left[\ln\left(P-1\right)\right]^{/}_{2}=MDP$</td></tr>
</table>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бляшке В*. Введение в геометрию тканей. М.: ГИФМЛ. 1959. 144 с.
2. *Дураков Б.П. (Рудаков)*. Составные номограммы первого жанра с четырьмя переменными. // «Ученые записки» Свердловского ГПИ. Математика. 1965. № 31.С. 50-72.
3. *Николаев П.В.* О представлении уравнений номограммами второго жанра.// Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. №6.
4. *Рудаков Б.П.* О предварительных условиях спрямляемости некоторых пространственных тканей.// "Вестник" Тюменского ГУ. 2006. №5. С.250-258.
5. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М.: ГИИЛ. 1947. 360 с.
6. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.: ОГИЗ 1947. 464 с.
7. *Дураков Б.П.(Рудаков).* О приведении уравнений с четырьмя переменными к каноническим формам пятого номографического порядка.// Номографич. сб. №6. М.: Изд. ВЦ АН СССР. 1969. С.190-199.

ABOUT THE CONDITIONS AND METHODS OF RECTIFIABILITY OF SOME SPACE NON-HEXAGON WEBS. TO THE HYPOTHESES OF W. BLASCHKE

Rudakov B. P.

A special class of non-hexagon 4-webs with important practical application is studied. Conditions and efficient methods for their rectification are found, the problem of uniqueness is analyzed. It is mentioned that the well-known hypothesis by W. Blaschke wasn't confirmed