О ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Турусикова Н. М.

Установлены необходимые и достаточные условия локальной управляемости нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в частном случае

Постановка задачи. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t,x,u), \tag{1}$$

в которой $x \in E_n$, $u \in E_m$, u – управление, $t \in [0,T]$, T – некоторое положительное число, E_k – k-мерное векторное пространство, $A(t), B(t)$ – матрицы соответствующих размерностей, $f(t,x,u)$ – n-мерная вектор-функция.

Введем обозначения: $|s| = \max_i \{|s_i|\}$, $\|y(\cdot)\| = \sup_{t\in[0,T]} |y(t)|$, $\|B(t)\| = \sup_{|s|\le 1} |B(t)s|$, $\|B(.)\| = \sup_{t\in[0,T]} \|B(t)\|$, $s \in E_k$, $y(t)$ – вектор-функция, $B(t)$ – матрица, $D(\delta_0) = \{(t,x,u) : t \in [0,T], x \in E_n, u \in E_m, |x| \le \delta_0, |u| \le \delta_0\}$, δ_0 – некоторое положительное число, $S = \{e \in E_{n+1} : |e| = 1\}$, $V(\delta_0) = \{\lambda \in E_1 : |\lambda| \le \delta_0\}$, $Y(\delta_0) = \{l \in E_n : |l| \le \delta_0\}$.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные на сегменте $[0,T]$ m-мерные вектор-функции $u(t)$, удовлетворяющие условию $\|u(.)\| \le \delta_0$. Множество всех допустимых управлений обозначим $U(\delta_0)$.

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

1) $A(t), B(t)$ – непрерывные на сегменте $[0,T]$ матрицы;
2) вектор-функция $f(t,x,u)$ непрерывна на множестве $D(\delta_0)$;
3) $f(t,x,u) = f_k(t,x,u) + o(|u|^k)$, где $k \ge 2$, $f_k(t,x,u)$ – вектор-форма порядка k относительно $u \in U(\delta_0)$, $o(|u|^k) \to 0$ при $u \to 0$ равномерно относительно $t \in [0,T]$, $x\,(|x| \le \delta_0)$;
4) $f_k(t,x,u) = f_k^1(t,u) + f_k^2(t,x,u)$, $f_k^2(t,x,u) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно относительно $t \in [0,T]$ и $u \in U(\delta_0)$.

Пусть $U_0 = \left\{ u(\cdot) \in U\left(\delta_0\right) : u(t) = H^{\mathrm{T}}(T,t)\, l + \lambda \varphi(t), l \in Y\left(\delta_0\right), \lambda \in V\left(\delta_0\right) \right\}$, где $\varphi(\cdot)$– некоторая произвольная непрерывная на сегменте $[0,T]$ вектор-функция такая, что $\int_0^T H(T,\tau)\varphi(\tau)d\tau = 0$, $H(T,t) = X(T)X^{-1}(t)B(t)$ – импульсная переходная матрица, $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, удовлетворяющая условию $X(0) = E$, E – единичная матрица, $(^{\mathrm{T}})$ – знак транспонирования.

Ставится задача – найти управление $u(\cdot) \in U_0$, определенное на сегменте $[0,T]$, такое, что система (1) имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$x(0) = 0, x(T) = \beta. \qquad (2)$$

Основные результаты. Обозначим $C_{[0,T]}$ – множество определенных и непрерывных на отрезке $[0,T]$ вектор-функций, $G(\delta_0) = \{g(\cdot) \in C_{[0,T]} : g(0) = 0, g(T) = \beta, \|g(\cdot)\| \le \delta_0\}$,.

Пусть вектор $l \in Y(\delta_0)$, вектор-функция $g(\cdot) \in G(\delta_0)$, управление $u(\cdot) \in U_0$. Решение системы $\dot{y} = A(t)y + B(t)u + f(t,g,u)$, определенное на сегменте $[0,T]$, запишем в виде $\tilde{g}(t) = \int_0^t H(t,\tau)u(\tau)\,d\tau + \int_0^t X(t,\tau)f(\tau,g,u)d\tau$, где $X(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$.

Соотношение $\tilde{g}(t) = \beta$ справедливо, если выполняется равенство $\int_0^T H(T,t)H^T(T,t)l\,dt = \beta - \int_0^T X(T,t)f\left(t,g(t),H^T(T,t)l + \lambda\varphi(t)\right)dt$.

Введем следующие обозначения: $\overline{\Lambda} = \int_0^T H(T,t)H^T(T,t)dt$, $\psi(g,l,\lambda) = \int_0^T X(T,t)f\left(t,g(t),H^T(T,t)l + \lambda\varphi(t)\right)dt$. Получим систему линейных уравнений

$$\overline{\Lambda}l = \beta - \psi(g,l,\lambda). \qquad (3)$$

Предположим, что $rang\overline{\Lambda} = r$, $0 < r < n$. Пусть $\gamma = (l,\lambda)$. С помощью элементарных преобразований и замены $\gamma = \rho e$, $\rho > 0$, $e = (e_l, e_\lambda)$, систему (3) сведем к системе

$$P(e)+\omega(\beta,\rho)+\overline{O}(\rho,e)+\overline{\overline{O}}(\rho,g)=0, \tag{4}$$

в которой $P(e)$ – вектор, $\overline{O}(\rho,e)\to 0$ при $\rho\to 0$, $\overline{\overline{O}}(\rho,g)\to 0$ при $g\to 0$, $\omega(\beta,\rho)$ – известная вектор-функция.

Теорема 1. Если при любом $e\in S$ $P(e)\neq 0$, то существует положительное число δ', что для любой вектор-функции $g(\cdot)\in G(\delta')$ и любого β $(|\beta|\leq\delta')$ существует множество в окрестности точки $\gamma=0$, в котором система (4) решений не имеет.

Таким образом, необходимым условием разрешимости системы (4) при $rang\overline{\Lambda}=r$, $0<r<n$, в достаточно малой окрестности точки $\gamma=0$ является существование такого вектора e^*, что $|e^*|=1$, $P(e^*)=0$. Разложив вектор-форму $\psi_k(e)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $e=e^*$ и заменив $z=e-e^*$, преобразуем систему (4) к системе вида

$$Kz+\sum_{i=2}^{k}R_i'\left(e^*,z\right)+\omega(\beta,\rho)+\overline{O}(\rho,e)+\overline{\overline{O}}(\rho,g)=0, \tag{5}$$

где K – постоянная матрица, $\sum\limits_{i=2}^{k}R_i'(e^*,z)$ – известная вектор-форма.

Теорема 2. Если $rangK=n$, то существует положительное число δ, что для любой вектор-функции $g(\cdot)\in G(\delta)$, любого вектора β $(|\beta|\leq\delta)$ система (5) имеет решение в любой достаточно малой окрестности точки $e^*\in S$.

Доказательство теоремы проводится методом неподвижной точки.

Согласно введенным ранее обозначениям $\gamma^*=\overline{\rho}\,\overline{e}$, $\overline{e}=\left(\overline{e_l},\overline{e_\lambda}\right)$, решением системы (3) являются l^*,λ^*, определяемые равенствами $l^*=\overline{\rho}\,\overline{e_l}$, $\lambda^*=\overline{\rho}\,\overline{e_\lambda}$. Искомое управление будет иметь вид $u^*(t)=H^{\mathrm{T}}(T,t)l^*+\lambda^*\varphi(t)$, $t\in[0,T]$ Соответствующее управлению $u^*(\cdot)$ решение системы (1) есть вектор-функция $g^*(\cdot)\in G(\delta_2)$, удовлетворяющая условиям (2).

Итак, теоремы 1 и 2 определяют условия существования решения поставленной задачи.

ABOUT LOCAL CONTROLLABILITY OF NONLINEAR SYSTEM

Turusikova N. M.

Necessary and sufficient criterion of local controllability of nonlinear system of ordinary differential equation in particular case is settled in this article