

ТРАНСФОРМИРУЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ПРАВИЛЬНЫХ ШЕСТИЗВЕННИКОВ

Грачев В. А., Найштут Ю. С.

Развиваются основы механики трансформирующихся оболочек, собранных из одинаковых пластинок в форме параллелограммов. Исследуется деформированное состояние сетей, составленных из шестигранников. Анализируются возможные технические приложения сетей для создания прочных структур

Рассмотрим шестизвенник, составленный из одинаковых пластинок, срединная поверхность которых имеет форму параллелограмма с острым углом α . Толщина пластинок равна δ , а ширина - h . Пластинки соединены цилиндрическими шарнирами, как показано на рис. 1 и рис. 2.

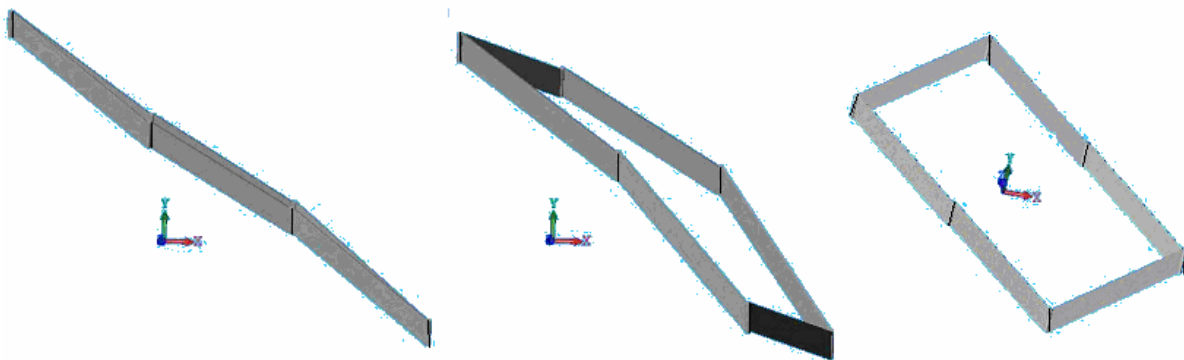


Рис. 1. Шестизвенник из равных параллелограммов

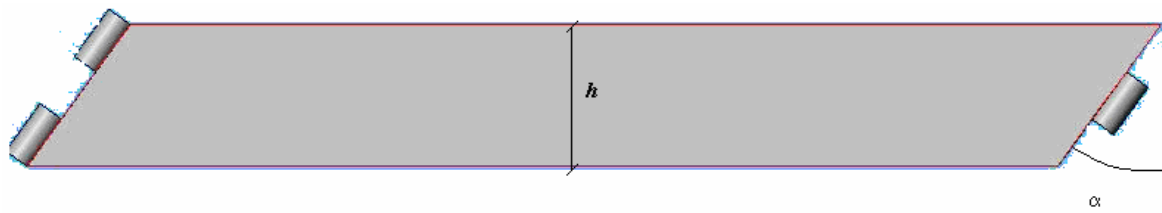


Рис. 2. Одна из граней шарнирного шестизвенника

Представленная конструкция является кинематической системой, имеющей в пространстве семь степеней свободы. Для доказательства этого факта выпишем ограничения, которым удовлетворяют относительные угловые скорости смежных граней (обозначены на рис. 3 буквами $\bar{\omega}_i$, $i = 1, 2 \dots 6$) и радиус-векторы средних линий параллелограммов \vec{r}_i .

Из замкнутости многогранника и теоремы о сложении угловых скоростей имеем [1]

$$\sum_{i=1}^{i=6} \bar{\omega}_i = 0 \quad (1)$$

К трем уравнениям (1) присоединим еще три, отражающие тот факт, что скорость точки, находящейся на пересечении граней одинакова, если ее вычислять применительно к той или иной грани:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}_2 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{r}_3 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4) \times \vec{r}_4 + \\ + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_5) \times \vec{r}_5 + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_5 + \vec{\omega}_6) \times \vec{r}_6 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Последнее равенство вместе с соотношением

$$\sum_{i=1}^{i=6} \vec{r}_i = 0 \quad (3)$$

означает, что сумма моментов векторов $\vec{\omega}_i$ относительно точки O равна нулю. При фиксированных \vec{r}_i равенства (1) - (3) показывают, что почти всегда $\vec{\omega}_i = 0$. Другими словами, шестигранник, как правило, геометрически неизменяем.

Но, если имеет место инверсия $\vec{\omega}_1 = -\vec{\omega}_4$, $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_5$, $\vec{\omega}_3 = -\vec{\omega}_6$, то векторная сумма в равенстве (1) $\sum_{i=1}^{i=6} \vec{\omega}_i = 0$, и соотношение (2) допускает ненулевое решение. Уравнение проекций моментов векторов $\vec{\omega}_i$ относительно оси Z тождественно обращается в нуль, а в два оставшихся уравнения моментов относительно осей X и Y входят три неизвестных. Следовательно, первоначально асимметричная ячейка, в которой звенья \vec{r}_4 , \vec{r}_5 , \vec{r}_6 получаются поворотом звеньев \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , \vec{r}_3 на угол 180° , является механизмом с одной степенью свободы при любом угле ψ .

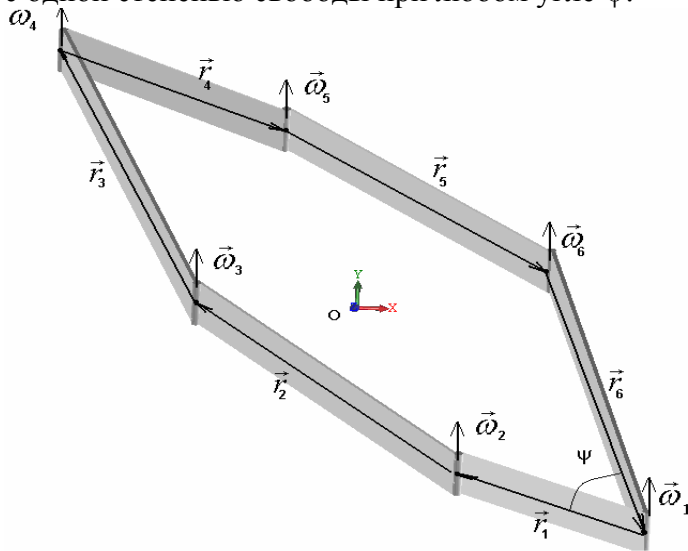


Рис. 3. Схема ячейки с относительными угловыми скоростями соседних граней

Таким образом, шестизвенник с одинаковыми гранями из параллелограммов представляет собой механизм типа «Турбула» [2, 3, 4]. Он имеет в пространстве семь степеней свободы. Твёрдотельная модель такого механизма представлена на рисунках 1-3 и реализована с помощью программы Solid Works 2004.

Если допустить, что тонкие пластинки обладают ничтожно малой крутильной жесткостью, то механизм рис. 3 имеет в пространстве $7+6=13$ степеней свободы.

Из таких «турбул» можно составить сеть, соединив в первоначальном состоянии (когда $\psi = 0$) соответствующие грани (рис. 4) или, образовав полосы из параллелограммов (рис. 5), как это сделано из трапеций в работе [5]. Сеть (рис. 5) будет «раздвигаться», если перпендикулярно к пластинкам с размером a приложена погонная нагрузка p .

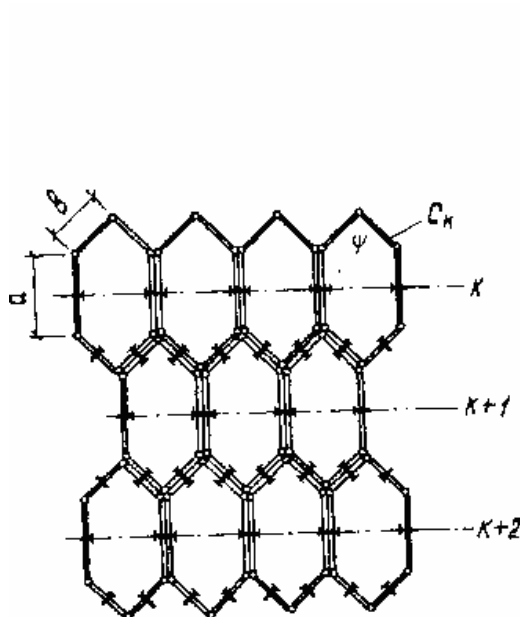


Рис. 4. Сеть из «турбул»

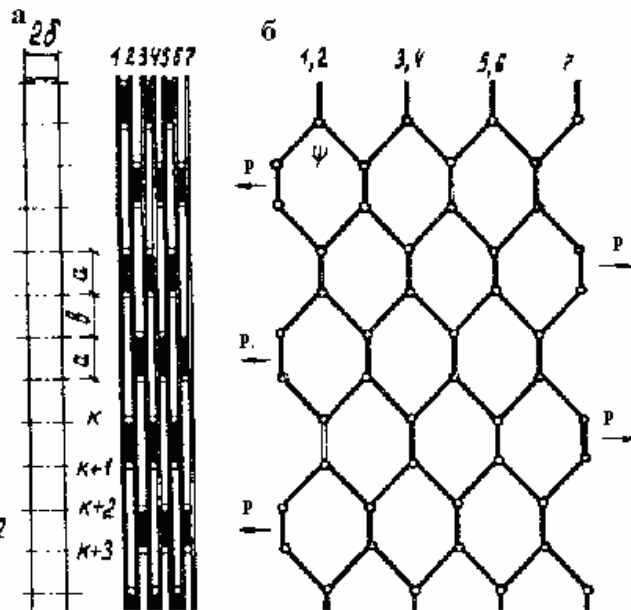


Рис. 5. Сеть из прямолинейных полос:
а – первоначальное положение,
б – после раздвижки на угол ψ

Если количество шестизвеников m велико, то общее число степеней свободы несоединенной решетки $F=13m$, а соединенные грани отнимают $R=12m$ степеней свободы. Поскольку $F-R=m>0$, то решетка из тонких параллелограммов – механизм. В сети могут быть параллелограммы двух размеров a и b .

Откажемся от предположения, что пластинки – абсолютно жесткие диски.

В этом случае сеть рис. 5 становится деформируемым упругим телом. В соответствии с теорией кручения стержней [6] наделим пластинки конечной крутильной жесткостью по формуле $GI_t = G \frac{\delta^3 h}{3}$, где G – модуль сдвига материала пластинок, а δ, h – толщина и ширина пластинок. Пусть размеры ячеек малы по сравнению с габаритами сети, а острый угол параллелограммов α невелик. Предполагая работу собранной сети упругой, можно получить (см. Приложение) приближенную формулу для потенциальной энергии, накопленной в ячейке с одинаковыми сторонами $a=b=l$, в зависимости от угла ее раскрытия ψ .

$$W = 0.24 \frac{G\delta^3 h}{l} \alpha^2 \sin^2(2\beta\psi) \quad (4)$$

Здесь α - острый угол параллелограмма (рис. 2), а $\beta = 1 + \frac{\alpha}{\pi}$.

Формула (4) показывает, что в сети имеются три состояния, когда потенциальная энергия минимальна и равна нулю (только такие состояния могут быть реализованы в твердотельном моделировании): эти состояния отвечают первоначально собранной «турбуле», когда три стороны лежат в одной плоскости, и два других, когда в одной плоскости располагаются две соседние пластинки (рис. 6, 7).

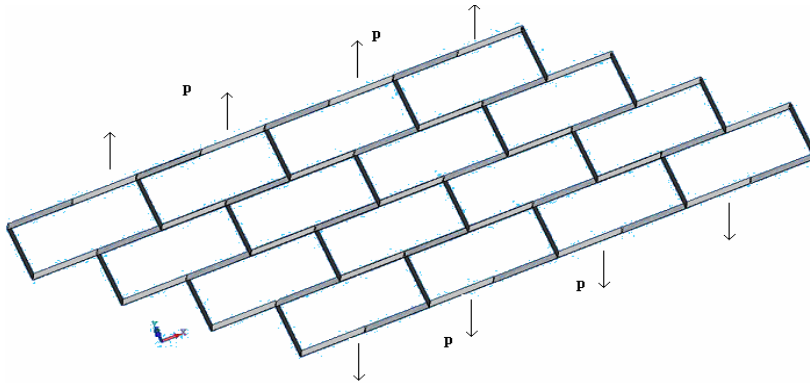


Рис. 6. Конфигурация устойчивого положения сети, когда силы приложены к пластинкам размера b

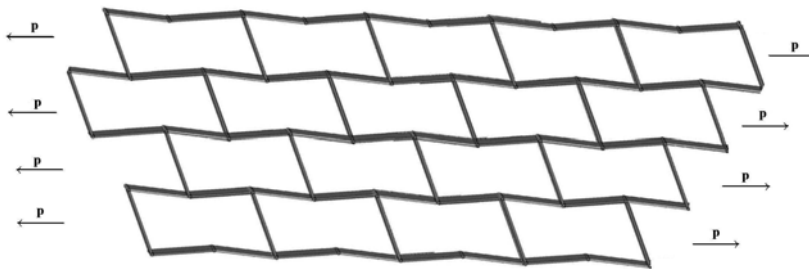


Рис. 7. Конфигурация устойчивого положения сети, когда силы приложены к пластинкам размера a

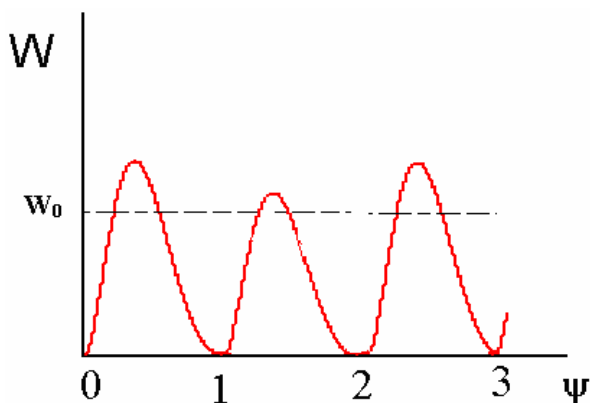


Рис. 8. График потенциальной энергии, накопленной в ячейке

Для произвольного угла ψ величину потенциальной энергии деформации ячейки W качественно изображает график (рис. 8): при этом точка 0 отвечает собранному па-

кету, точка 1 – рис. 6, а точка 2 – рис. 7. Точка 3 вновь возвращает к первоначальному виду.

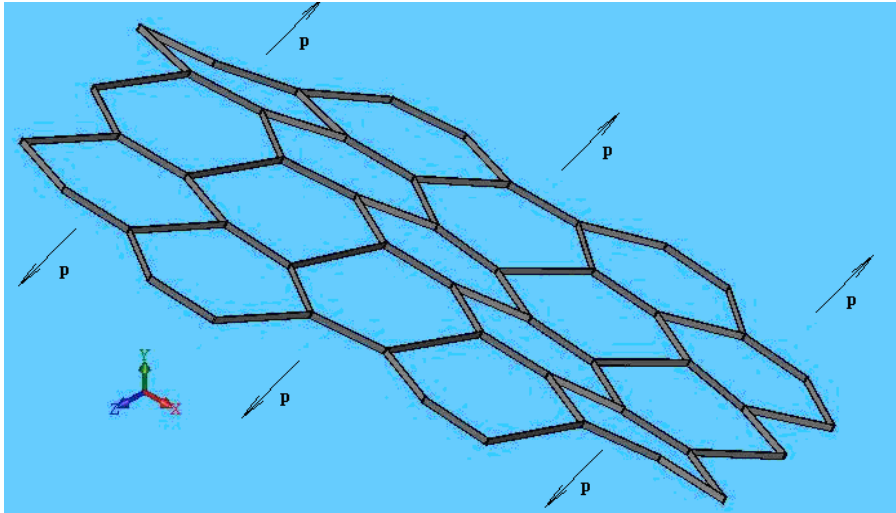


Рис. 9. Сеть из параллелограммов в промежуточном (напряженном) состоянии

Получается, что если при растяжении сети сообщается энергия W_0 , после чего силы p обращаются в нуль, то система может вернуться в состояния 0, 1 либо 2 в зависимости от величины угла ψ .

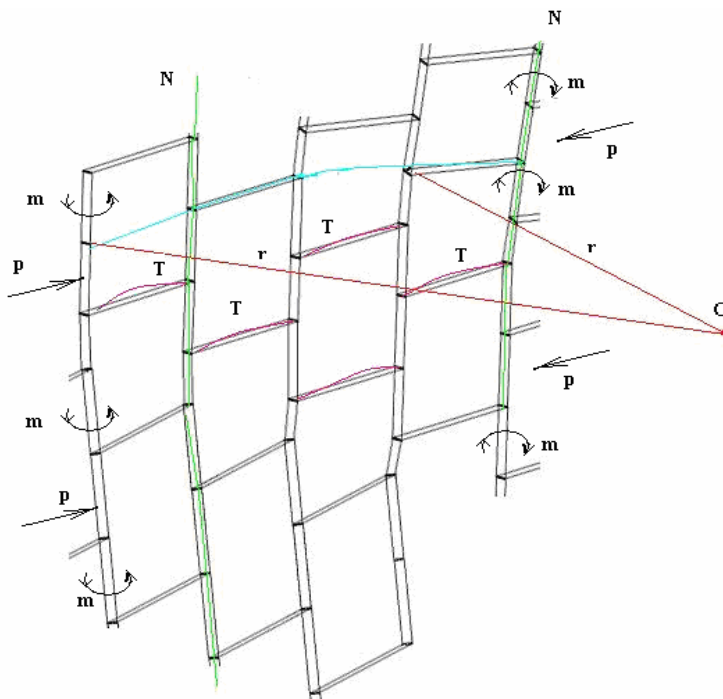


Рис. 10. Схема деформирования сети из параллелограммов

Говоря иначе, сеть из состояния рис. 9 может «хлопнуть» не только в первоначально собранный пакет, но и в структуры рис. 6, рис. 7.

Плоские решетки имеют интересные технические приложения, поскольку даже при сравнительно большом значении ширины h могут упруго сворачиваться в рулоны подобно тонкой ткани или тонкой стальной пластинке.

Фрагмент свернутой решетки в цилиндрическую поверхность радиуса r показан на рис. 10. Элементы, располагающиеся вдоль образующих N , легко закручиваются от небольших моментов m , а тангенциальные элементы T сокращаются под действием незначительных сил p (из-за потери устойчивости).

На рис. 11 воспроизводится схема рулонирования резервуара из книги [7]. Рисунок показывает, как упруго разворачивается корпус резервуара K по направляющей S при толщине стальных листов до 20-25 мм.

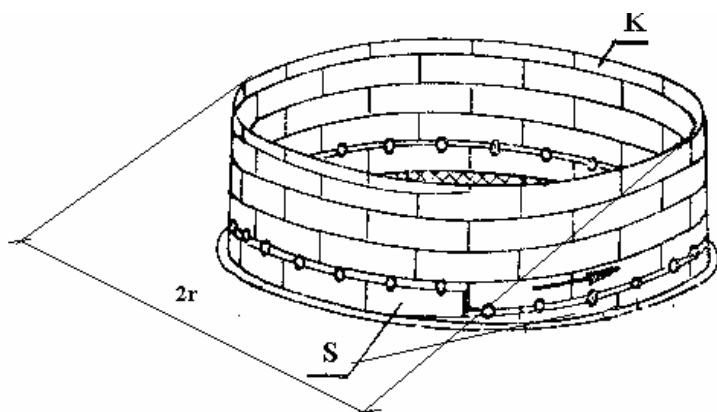


Рис. 11. Схема рулонирования стального резервуара

Использование решеток рис. 10 позволяет увеличить толщину «стенок» резервуара (размер h) во много раз. Другие приложения решеток из сочлененных «турбул» могут быть полезны при создании прочных трансформирующихся оболочек [8], а также надежных систем привода механизмов [9].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление потенциальной энергии деформации, накопленной в ячейке – турбуле, когда она является частью сети

В свободной ячейке при изменении угла ψ все грани остаются плоскими. Грани, по которым осуществляется склеивание сети, имеют разный наклон в фиксированной системе координат. Обозначим единичные нормали к соответствующим граням буквами \mathbf{m} и \mathbf{n} (рис. 12).

Сеть деформируется таким образом, что ее среднее отклонение от плоскости минимально, потому что единичные векторы нормалей к граням 2 и 5 (рис. 3) почти всегда параллельны (то же относится к векторам $(\vec{r}_1 - \vec{r}_6)$ и $(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)$).

Для того чтобы грани типа 123 и 456 различных (но малых по размерам!) ячеек можно было объединить в деформируемую упругую систему, достаточно совместить средние сечения пластинок. Это равносильно требованию, что средний угол закручивания пластинки надо подсчитать по формуле

$$\theta = \frac{1}{2l} \arcsin |(\vec{n} \times \vec{m})| \quad (5)$$

Здесь \vec{n}, \vec{m} – то же, что на чертеже обозначают буквы **n**, **m**.

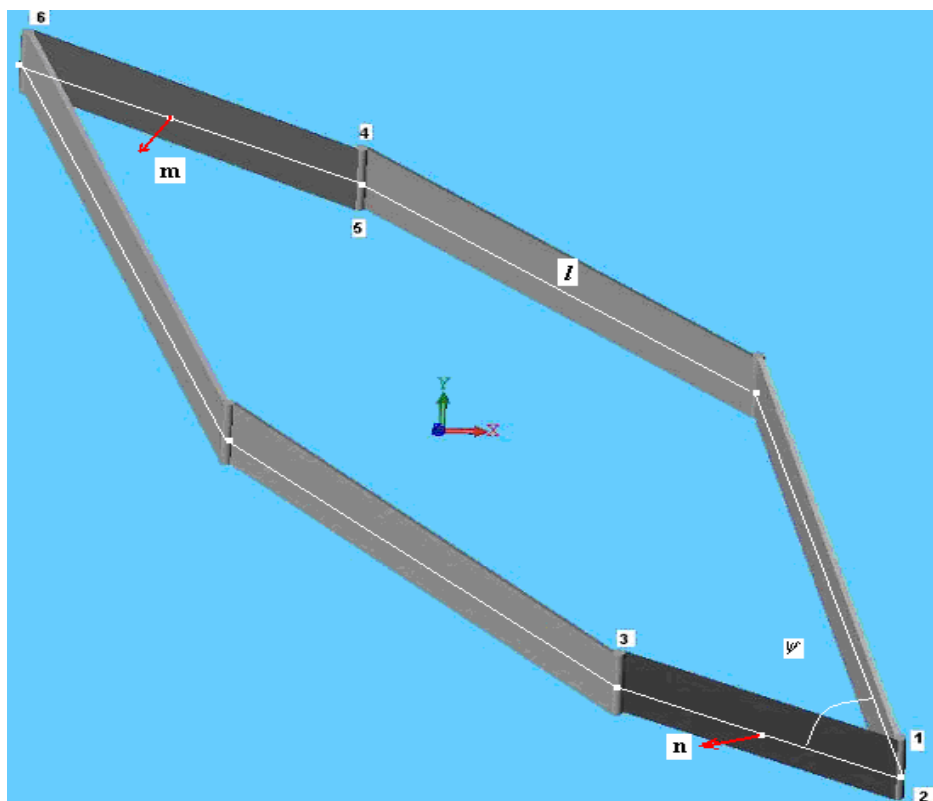


Рис. 12. Геометрические параметры шестизвенника

Заметим далее, что конструкция сети вносит такие ограничения

$$\theta = 0, \text{ если } \psi = 0, \text{ либо } \psi = \pi/2 - \alpha \quad (6)$$

Здесь α - острый угол параллелограмма, ψ - двугранный угол раскрытия ячейки. Поэтому для $(\mathbf{n} \times \mathbf{m})$ справедлива аппроксимация

$$|(\vec{n} \times \vec{m})| = t \sin(2\beta\psi), \quad \beta = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \quad (7)$$

Найдем численно компоненты векторов \mathbf{m} , \mathbf{n} и величину t при максимальном угле раскрытия, анализируя построения Solid Works с $\alpha = 0.31$. Координаты отмеченных точек:

1	X:-1949.51 мм	Y:576.84 мм	Z:-322.51 мм
2	X:-1958.73 мм	Y:472.52 мм	Z:-388.24 мм
3	X:-2384.17 мм	Y:765.23 мм	Z: 244.11 мм
4	X:-1132.11 мм	Y:-434.56 мм	Z:-441.25 мм
5	X:-1141.34 мм	Y:-538.88 мм	Z:-506.97 мм
6	X:-1488.10 мм	Y:-294.47 мм	Z: 183.93 мм

Уравнения плоскостей, проходящих через точки 1, 2, 3 и 4, 5, 6, запишутся в виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := \begin{bmatrix} (\mathbf{x} + 1950) & (\mathbf{y} - 577) & (\mathbf{z} + 322) \\ -9 & -105 & -66 \\ -434 & 188 & 566 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})| \rightarrow -47022 \cdot \mathbf{x} - 126378090 + 33738 \cdot \mathbf{y} - 47262 \cdot \mathbf{z}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) := \begin{bmatrix} (\mathbf{x} + 1132) & (\mathbf{y} + 435) & (\mathbf{z} + 441) \\ -9 & -104 & -66 \\ -356 & 141 & 622 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})| \rightarrow -55382 \cdot \mathbf{x} - 66923747 + 29094 \cdot \mathbf{y} - 38293 \cdot \mathbf{z}$$

$$47 \cdot 47 + 33.7 \cdot 33.7 + 47.2 \cdot 47.2 = 5.573 \times 10^3$$

$$55.3 \cdot 55.3 + 29.1 \cdot 29.1 + 38.3 \cdot 38.3 = 5.372 \times 10^3$$

$$\sqrt{5573} = 74.653 \quad \sqrt{5372} = 73.294$$

$$\frac{-47262}{74653} = -0.633 \quad \frac{-47022}{74653} = -0.63 \quad \frac{33738}{74653} = 0.452$$

$$\frac{-55382}{73294} = -0.756 \quad \frac{29094}{73294} = 0.397 \quad \frac{-38293}{73294} = -0.522$$

$$-0.63 \cdot -0.756 + 0.452 \cdot 0.397 + 0.633 \cdot -0.522 = 0.986$$

$$\arccos(0.986) = 0.168 \quad 0.168 \cdot \frac{180}{3.14} = 9.631$$

$$\mathbf{m} := \begin{pmatrix} -0.63 \\ 0.452 \\ -0.633 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n} := \begin{pmatrix} -0.756 \\ 0.397 \\ -0.522 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0.986 \quad \mathbf{n} \times \mathbf{m} = \begin{pmatrix} -0.015 \\ -0.15 \\ -0.092 \end{pmatrix}$$

Относительный угол закручивания пластинки получится равным

$$\theta = \frac{1}{2} a \cos(0.986) / l = 0.084 / l$$

Аппроксимируя линейно на произвольный угол α , получим окончательно

$$\theta = 0.4\alpha \sin(2\beta\psi) / l \quad (8)$$

Пользуясь выражением крутильной жесткости, определим величину потенциальной энергии, накопленной в ячейке от ее раскрытия на угол ψ

$$W = GI_t \frac{3\theta^2 l}{2} = 0.24 \frac{G\delta^3 h}{l} \alpha^2 \sin^2(2\beta\psi) \quad (9)$$

Аналогично можно получить формулу для работы сил по раскрытию ячейки в виде

$$A \approx 4.5pl^2 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \quad (10)$$

Как и следовало ожидать, из равенства $A = W$ получится $p \rightarrow 0$, если $\delta / l \rightarrow 0$. Сеть становится «чистым» механизмом, когда $\alpha = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
2. *Gan W. W., Pellegrino S.* Kinematic bifurcations of closed-loop deployable frames // *Computation of Shell and Spatial Structures*, Salzburg, 2005.
3. *Phillips J.* Freedom in Machinery. Vol. 2, Screw Theory Exemplified. Cambridge Univ. Press, 1984, 192 p.
4. *Lee C.-C., Dai J. S.* Configuration analysis of the Schatz linkage // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 217: (2003), P.779-786
5. *Грачев В.А., Найштут Ю.С.* Континуальные трансформирующиеся оболочки из прямолинейных полос. СПб.:ТО Терция, 1995, 38 с.
6. *Васиdзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
7. *Дидковский В.М., Найштут Ю.С.* Рулонированные металлические листовые конструкции. Куйбышев: КуИСИ, 1972, 105с.
8. *Грачев В.А., Найштут Ю.С.* Управляемые трансформирующиеся оболочки. СПб.: Изд-во С.-Петербур. Ун-та, 1996, 35 с.
9. *Hutchinson R.G., Wick N., Evans A.G., Fleck N.F., Hutchinson J.W.* Kagome plane structures for actuation // *International Journal of solids and structures*, 40: (2003), P. 6969-6980

TRANSFORMED SYSTEMS BASED ON REGULAR SIX LINK LOOPS

Grachev V. A., Nayshtut Yu. S.

The paper covers mechanics foundations of the transformed shells compiled of the same size parallelogram-shaped plates. It researches the strained state of the nets made of six link loops and reviews possible technical applications of the nets to create durable structures