

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОМПЛЕКСНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Есина А. И.

Рассмотрим уравнение $-h^2 y'' + i * V(x) y = E y$, где h -действительный параметр, $V(x) = \text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x)$. При фиксированном h вопрос о том, при каких E это уравнение имеет решение, является вопросом, каков спектр оператора $H(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}) = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i * V(x)$. Нас будет интересовать асимптотика этого спектра при $h \rightarrow 0$. В физике этот предел соответствует переходу от квантовой к классической системе

Введение. До сих пор эта задача решена только для $V(x) = x, x^2$ на интервале $[0,1]$ и для $V(x) = \text{Cos}(x)$. Подобные задачи возникают в теории гидродинамической устойчивости, в магнитной гидродинамике, также в проблеме гидромагнитного динамо, с помощью которого поддерживается магнитное поле Земли. Эта задача является модельной задачей Орра-Зоммерфельда. Вся трудность задачи состоит в том, что оператор является несамосопряженным. Следовательно, его псевдоспектр не совпадает со спектром.

Модель. Для решения этой задачи введем так называемые линии Стокса, точки поворота и канонические области [1].

Определение. Точки поворота определяются уравнением $E = i * V(x)$.

Определение. Линией Стокса называется линия, выходящая из точки поворота z_0 , вдоль которой $\text{Re} \int_{z_0}^z \sqrt{i * V(x) - E} dx = 0$. Линия Стокса, по определению, не имеет внутренних точек, являющихся точками поворота.

Определение. Область D плоскости z называется канонической, если она ограничена линиями Стокса, содержит внутри себя одну из линий Стокса и отображается функцией $\int \sqrt{i * V(x) - E} dx$ на всю плоскость с конечным или бесконечным числом вертикальных разрезов. (т.е. выбирается точка поворота и линия Стокса и по ним строится каноническая область, которая будет ограничена ближайшими линиями Стокса, и не будет включать в себя других линий Стокса)

Строится взаимное расположение линий Стокса при различных E на основе следующих свойств:

1. линия Стокса начинается в точке поворота и заканчивается либо в бесконечности, либо в точке поворота,
2. линия Стокса не может содержать точку поворота внутри себя,
3. линия Стокса не может пересекать себя или другую линию Стокса,
4. из точки поворота кратности d выходят $d+2$ линии Стокса,

5. граф линий Стокса (на комплексной плоскости) не может содержать топологическую окружность,
6. линия Стокса разбивает комплексную плоскость на области типа полуплоскости и полосы (то есть на области, имеющие в качестве границы одну топологическую прямую или дизъюнктивное объединение двух топологических прямых).
7. $V(x)$ периодичен, то и граф линий Стокса периодичен с тем же периодом T ($T=2$)
8. $\cos x$ четен, то граф линии Стокса симметричен относительно нуля.

В нашем случае из каждой точки поворота выходит 3 линии Стокса.

Лемма 1. Из точки поворота порядка m выходят $m+2$ линии Стокса. Каждая из них является аналитической кривой. Две соседние линии образуют между собой угол $\frac{2\pi}{m+2}$.

Пусть $(E-I^*(\cos(x)+\cos(2x)))$ -целая функция, Φ -совокупность всех ее линий Стокса, R -риманова сфера. Всякая область, содержащаяся в $R \setminus \overline{\Phi}$, принадлежит к одному из двух типов

1. *Область типа полуплоскости.* Такая область отображается функцией (2) взаимно однозначно и конформно на полуплоскость $\text{Im } \xi > a$ (или $\text{Im } \xi < a$) и ограничена связной кривой, состоящей из линий Стокса.

2. *Область типа полосы.* Такая область отображается функцией (2) взаимно однозначно и конформно на полосу $a < \text{Im } \xi < b$ и ограничена двумя связными кривыми, состоящими из линий Стокса.

Область D плоскости z называется канонической, если она ограничена линиями Стокса, не содержит их внутри себя и отображается функцией (2) на всю плоскость с конечным или бесконечным числом вертикальных разрезов.

Теорема 1. Пусть $p(z)$ -целая функция, $\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \text{Im } \xi(z) = \text{const}}} \text{Im } \xi(z) = \infty$ и

1. $\overline{\Phi} = \Phi$;

2. для любой линии Стокса S имеем $\overline{\Phi \setminus S} = \Phi \setminus S$.

Тогда всякую линию Стокса можно включить в качестве внутренней линии в каноническую область (причем, многими способами) Если $p(z)$ -полином, то образ канонической области при отображении функцией (2) содержит конечное число разрезов.

Доказательство. [1]

Определение. Элементарными матрицами перехода назовем матрицы, соответствующие следующим переходам:

1. Переход от элементарной ф.с.р., определяемой тройкой (S, z_0, D_1) к элементарной ф.с.р., определяемой тройкой (S, z_0, D_2)

При таком переходе ни линия Стокса, ни направление на ней не меняются; меняется лишь каноническая область, содержащая эту линию Стокса.

2. Переход от элементарной ф.с.р., определяемой тройкой (S, z_0, D) к элементарной ф.с.р., определяемой тройкой (S, z_1, D) .

В этом случае меняется только направление линии Стокса, такой переход существует только для конечной линии Стокса.

3. Переход от элементарной ф.с.р., определяемой тройкой (S_1, z_1, D) к элементарной ф.с.р., определяемой тройкой (S_2, z_2, D) , причем лучи $\xi(S_1)$ и $\xi(S_2)$ (лежат в $\xi(D)$) направлены в одну сторону

4. . Переход от элементарной ф.с.р., определяемой тройкой (S_1, z_0, D_1) к элементарной ф.с.р., определяемой тройкой (S_2, z_0, D_2) .

Это переход с одной линии Стокса на другую, имеющую то же начало.

Лемма 2. В нашем случае матрицу перехода от одной элементарной ф.с.р. к любой другой элементарной ф.с.р. можно представить в виде произведения конечного числа матриц, отвечающих переходам 1-4.

Пусть задано пространство функций, снабженное скалярным произведением. И пусть задан $A(x, \varepsilon)$ -линейный неограниченный оператор

Определение. Точка λ принадлежит ε -псевдоспектру оператора $A(x, \varepsilon)$ тогда и только тогда, когда найдется функция $\varphi(x, \varepsilon)$ такая, что $\|\varphi(\cdot, \varepsilon)\|=1$ для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, +\infty)$, и обладающая свойством

$$\|A(x, \varepsilon)\varphi(x, \varepsilon) - \lambda\varphi(x, \varepsilon)\| = O(\varepsilon), \varepsilon \rightarrow 0+0$$

Лемма 3. Псевдоспектр содержится в полуполосе см. Рис.1

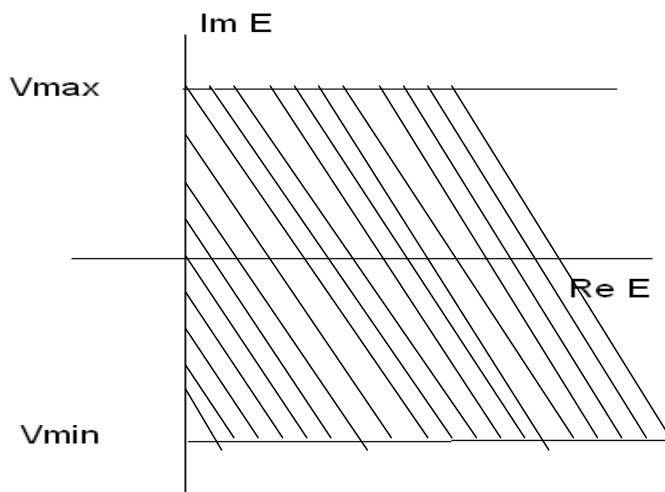


Рис. 1. Псевдоспектр

Доказательство. [4]

Результаты.

Лемма 4. Спектр сосредоточен в $O(h^2)$ окрестности конечного числа кривых на комплексной плоскости E . (т.е. существует множество M на комплексной плоскости, являющееся объединением конечного числа аналитических кривых, таких что, если E принадлежит спектру, то $\text{dist}(E, M) = O(h^2)$).

Лемма 5. Точки спектра находятся в $O(h^2)$ окрестностях решений уравнений

$$\int_{x_i}^{x_j} \sqrt{E - i^* V(x)} dx = \pi h(n_{ij} + \gamma / 2), \gamma = 0, 1$$

Доказательство. Следует из матриц перехода и условия на спектр. Из одной канонической области надо перейти через период в другую каноническую область и вы-

числить матрицу монодромии и условие на спектр. Условие на спектр будет только в том случае, если у матрицы монодромии имеется собственное значение равное 1. И из равенства детерминанта также 1 получаем условие на спектр.

Для примера возьмем один из вариантов расположения линий Стокса и вычислим для него условие на спектр:

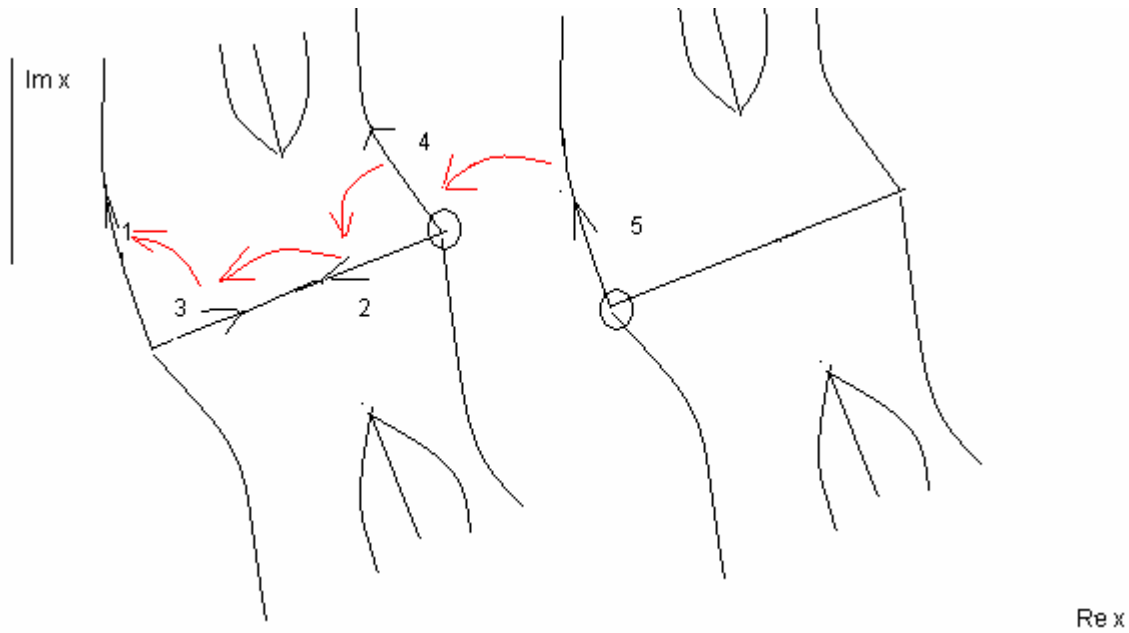


Рис. 2. Цифрами обозначены номера линий Стокса. Будем переходить справа налево (с линии под номером 5 на 4, затем на 2 и 1)

Переход с 5 на 4 соответствует элементарной матрице перехода под номером 3.

$$\int \sqrt{i^* V(x) - E} dx = \xi, \quad \lambda = \frac{1}{ih}$$

$$\xi_0 = \lim_{x \rightarrow 5} (\arg(I^* V(x) - E)^{-1/4}) - \lim_{x \rightarrow 4} (\arg(I^* V(x) - E)^{-1/4})$$

$$\exp(i\xi_0) \begin{pmatrix} \exp(-\lambda\xi(5,4)) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda\xi(5,4)) \end{pmatrix}$$

В этом случае под числами 5 и 4 подразумевается точка поворота, из которой выходит линия Стокса 5, и точка поворота, из которой выходит линия 4. (интеграл между этими точками поворота)

Переход с 4 на 2 соответствует элементарной матрице 4. Ее матрица имеет вид

$$\exp(-i\pi/6) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

Переход с 2 на 3 соответствует элементарной матрице 2 и имеет вид

$$\exp(i\tilde{\xi}_0) \begin{pmatrix} 0 & \exp(-\lambda\xi(2,3)) \\ \exp(\lambda\xi(2,3)) & 0 \end{pmatrix}$$

И наконец, переход с 3 на 1-это тоже самое, что и с 4 на 3.
Перемножив эти матрицы, получим матрицу монодромии:

$$\exp(i(\xi_0 + \tilde{\xi}_0 - \pi/3)) \begin{pmatrix} 0 & \exp(-\lambda\xi(5,4) + \lambda\xi(3,2)) \\ \exp(\lambda\xi(5,4) - \lambda\xi(3,2)) & i(\exp(-\lambda\xi(5,4) + \lambda\xi(3,2)) + \exp(\lambda\xi(5,4) - \lambda\xi(3,2))) \end{pmatrix}$$

Заметим, что наличие собственного значения равного 1 у матрицы монодромии M (т.е. принадлежность E дискретному спектру) эквивалентно условию $\text{tr } M = \det M + 1$. Исходя из этого запишем уравнение

$$\exp(i(\xi_0 + \tilde{\xi}_0 - \pi/3))i(\exp(-\lambda\xi(5,4) + \lambda\xi(3,2)) + \exp(\lambda\xi(5,4) - \lambda\xi(3,2))) = -\exp(2i(\xi_0 + \tilde{\xi}_0 - \pi/3)) + 1$$

Нормируем по ξ_0 и $\tilde{\xi}_0$ так, что получаем уравнение $2\exp(\lambda\xi(5,4))\text{Cos}(\lambda\xi(3,2)) = 2$

Ветвь выбираем так, что $\text{Im } \xi(z_0, z) > 0$ (где z_0 точка поворота)

$$\text{Cos}(\lambda\xi(2,3)) = \exp(-\lambda\xi(5,4))$$

$$\exp(-\lambda\xi(5,4)) \rightarrow 1$$

И уже отсюда получаем условие на спектр

$$\text{Im } \xi(2,3) = h\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n = 1, 2, \dots$$

Тоже самое делаем для всех остальных взаимных расположений линий Стокса.

Лемма 6. При $E \in \mathbb{C} \setminus i\left(-\frac{9}{8}, 2\right)$

$$I(E) = \text{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i(\text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x)) - E} dx = 0$$

В том случае, если $\text{Re } E > 0, \text{Im } E < 0$

Доказательство.

$$I(E) = \text{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i(\text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x)) - E} dx = 2 \text{Re} \int_0^{\pi} \sqrt{i(\text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x)) - E} dx$$

Рассмотрим $E = \text{Re } E < 0$. Следовательно, нулей подынтегрального выражения нет. Знак $\text{Re} \sqrt{i(\text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x)) - E}$ постоянен, следовательно, отличен от нуля на всем пути интегрирования и $I(E) \neq 0$. А значит, мы пришли к противоречию и $\text{Re } E > 0$.

Рассмотрим E с положительной действительной частью. Получаем $\text{Re}(i(\text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x)) - E) = -\text{Re } E < 0$ для любого x принадлежащего отрезку $(0, \pi)$. То есть образ пути интегрирования под действием функции $i(\text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x)) - E$ не переходит через луч $[0, +\infty)$. Следовательно, можно зафиксировать ветвь корня с разрезом вдоль этого луча. Выберем такую ветвь: $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \sqrt{i(\cos(x) + \cos(2x)) - E}}{\partial \operatorname{Im} E} = -\operatorname{Re} \frac{i}{2\sqrt{i(\cos(x) + \cos(2x)) - E}} =$$

$$= -\operatorname{Im} \frac{1}{2\sqrt{i(\cos(x) + \cos(2x)) - E}} > 0$$

По выбору ветви корня. Следовательно, подынтегральная функция возрастает на всем пути интегрирования для любого $x \in (0, \pi)$. А значит и сам интеграл строго монотонно возрастает по $\operatorname{Im} E$ при любом фиксированном $\operatorname{Re} E$. И при любом фиксированном $\operatorname{Re} E > 0$ уравнение $I(E) = 0$ имеет не более одного решения.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора:

$$\sqrt{i(\cos(x) + \cos(2x)) - E} = \sqrt{-E} \left(1 - \frac{i(\cos(x) + \cos(2x))}{2E} + \frac{(\cos(x) + \cos(2x))^2}{8E^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{i(\cos(x) + \cos(2x))^3}{16E^3} + \dots \right)$$

И проинтегрируем:

$$\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i(\cos(x) + \cos(2x)) - E} dx = \operatorname{Re} \left(2\sqrt{-E} \left(\left(1 + \frac{E^2}{8}\right)\pi + \frac{3\pi i}{32E^3} \right) \right)$$

Рассмотрим случай $\operatorname{Im} = 0, \operatorname{Re} E > 0$. Следовательно, $I(E) = -\frac{3\pi}{16E^2\sqrt{E}} < 0$ при любом фиксированном $\operatorname{Re} E$. Отсюда следует, что кривая $I(E) = 0$ будет находиться ниже оси $\operatorname{Re} E$.

Лемма 7. Если точки z_1 и $z_1 + 2\pi$ соединены в графе Стокса (то есть соединены криволинейной ломаной из линий Стокса), то

$$I(E) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i^* V(x) - E} dx = 0$$

Доказательство. Очевидно

Лемма 8. Уравнение

$$J(E) = \operatorname{Im} \int_{-x_j}^{x_j} \sqrt{E - i(\cos(x) + \cos(2x))} dx = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \operatorname{ArcCos} \left(\frac{1}{4} (-1 - \sqrt{9 - 8iE}) \right)$$

$$x_{3,4} = \pm \operatorname{ArcCos} \left(\frac{1}{4} (-1 + \sqrt{9 - 8iE}) \right)$$

Имеет ровно одно решение на параметре E , т.ч. $I(E) = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \sqrt{i(\cos(x) + \cos(2x)) - E} dx = 0$.

Доказательство. Как и в предыдущей лемме зафиксируем ветвь корня:

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

Перепишем интеграл $J(E)$ в виде интеграла по действительной переменной r .

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{-x_j(E)}^{x_j(E)} \sqrt{i(\operatorname{Cos}(x) + C \operatorname{os}(2x)) - E} dx &= 2 \operatorname{Re} \int_0^{x_j(E)} \sqrt{i(\operatorname{Cos}(x) + C \operatorname{os}(2x)) - E} dx = \\ &= 2 \operatorname{Re} \int_0^1 x_j \sqrt{i(\operatorname{Cos}(x_j r) + C \operatorname{os}(2x_j r)) - E} dr \end{aligned}$$

Вычислим производную подынтегрального выражения по параметру E :

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(x_j \sqrt{i(\operatorname{Cos}(x_j r) + C \operatorname{os}(2x_j r)) - E})}{\partial \operatorname{Im} E} = -\operatorname{Re} \frac{x_j i}{2\sqrt{i(\operatorname{Cos}(x_j r) + C \operatorname{os}(2x_j r)) - E}} > 0$$

Интеграл строго монотонно возрастает по параметру $\operatorname{Im} E$ при любом фиксированном $\operatorname{Re} E > 0$. И при любом фиксированном $\operatorname{Re} E > 0$ уравнение $J(E)=0$ имеет не более одного решения. Из леммы 1 следует, что при любом фиксированном $\operatorname{Re} E > 0$ уравнение $I(E)=0$ имеет не более одного решения. Следовательно, система уравнений: $I(E)=0$ и $J(E)=0$ имеет не более одного решения.

Теорема 2. Если E принадлежит спектральному графу, то

1. Существует конечная линия Стокса, соединяющая две точки поворота $x_1(E)$ и $x_2(E)$;

2. для любой цепочки канонических областей, инвариантной относительно сдвига $x \rightarrow x + 2\pi$, существует область из этой цепочки, содержащая конечную линию Стокса.

Доказательство. Следует из матриц перехода и условия на спектр. Из одной канонической области надо перейти через период в другую каноническую область и вычислить матрицу монодромии и условие на спектр. Условие на спектр будет только в том случае, если у матрицы монодромии имеется собственное значение равное 1. Допустим возьмем расположение линий Стокса, когда нет конечной линии. Условие не будет, т.к. там отсутствует интеграл между точками поворота.

Теорема 3. В случае $V(x) = \operatorname{Cos}(x) + \operatorname{Cos}(2x)$ имеется 27 топологически различных случаев взаимного расположения линий Стокса. Из которых вклад в спектр вносят только 8.

Доказательство. На основе 8 свойств линий Стокса, описанных в модели, строятся все возможные расположения линий Стокса в нашем случае.

Построим линии Стокса на цилиндре: (x_1, x_2, x_3, x_4 -точки поворота)

1. Случай когда все линии Стокса уходят на $\pm\infty$.

Из точки x_1 все три линии уходят на $+\infty$, следовательно из точки x_4 все уходит на $-\infty$. То же самое с x_2 и x_3 . Из x_2 они уходят на $+\infty$, а из x_3 на $-\infty$.

Затем случай, который является зеркальным отображением предыдущего.

Случай, когда из x_1 и x_4 уходят соответственно на $-\infty$ и на $+\infty$. А из x_2 и x_3 наоборот на $+\infty$ и на $-\infty$.

Вариант у которых полностью зеркальное расположение линий Стокса.

Случай когда из точки x_1 и x_2 две линии Стокса уходят на $-\infty$. а одна на $+\infty$

Следовательно линии Стокса из x_4 симметричны линиям Стокса из x_1 , а из x_3 симмет-

ричны линиям из x_4 . Противоположный случай. Когда из x_2 одна линия уходит на $+\infty$ и две на $-\infty$ -> из x_3 две на $+\infty$ и одна на $-\infty$.

Случае линии Стокса из x_2 и x_3 ведут себя также как и в 21. А из x_1 все убегает на $+\infty$. Тоже самое, только из x_1 все убегает на $-\infty$.

Случаи являются разными комбинациями когда из x_2 и x_3 линии Стокса уходят либо на $+\infty$ либо на $-\infty$, а из x_1 либо одна либо две линии убегают на $+\infty$ и на $-\infty$.

2. Случаи, когда какие либо точки поворота соединяются сами с собой, совершив полный оборот вокруг цилиндра.

В первом случае из x_1 одна убегает на $+\infty$ и эта точка соединяется сама с собой. Аналогична точка x_4 только одна линия уходит на $-\infty$. А из x_2 и x_3 все уходит соответственно на $+\infty$ и на $-\infty$.

Во втором случае сами с собой соединяются все четыре точки, но x_1 и x_4 еще и соединяются линией Стокса между собой, а из x_2 и x_3 по одной линии уходит на $+\infty$ и $-\infty$.

3. Случаи соединения между собой x_1 и x_3 , а также x_2 и x_4 .

Допустим из x_1 выходит $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

γ_3 соединяет x_1 и x_3 , γ_2 уходит на $-\infty$, а γ_1 на $+\infty$. Из x_3 две оставшиеся линии убегают на $+\infty$. С x_1 и x_3 все зеркально отображается на x_2 и x_4 .

Оставшиеся две линии с x_1 уходят на $+\infty$, а с x_3 на $-\infty$. Следовательно с x_2 на $+\infty$, а с x_4 на $-\infty$.

Случай, когда между собой соединяются x_1 с x_3 , x_2 с x_4 , но кроме того соединяются и x_2 с x_3 . Остальные линии с x_1 уходят на $+\infty$, а оставшаяся линия с x_3 убегает на $-\infty$.

4. Случаи соединения между собой x_1 с x_2 , а x_3 с x_4 .

две линии из x_1 уходят на $-\infty$, а из x_4 на $+\infty$.

Из x_1 одна линия уходит на $-\infty$ и одна на $+\infty$. И также из других точек.

из x_2 обе линии уходят на $+\infty$, а из x_3 одна линия уходит на $-\infty$ и одна на $+\infty$.

И три случая противоположные трем последним.

5. Случаи соединения между собой двух диаметрально противоположных точек поворота.

соединяются точки x_2 и x_3 , из x_2 остальные две линии Стокса уходят на $+\infty$. А из x_1 две линии на $+\infty$ и одна на $-\infty$.

Случай противоположный последнему.

И два случая когда все линии из x_1 уходят на $+\infty$ и $-\infty$.

-> Мы описали все возможные случаи расположения линий Стокса.

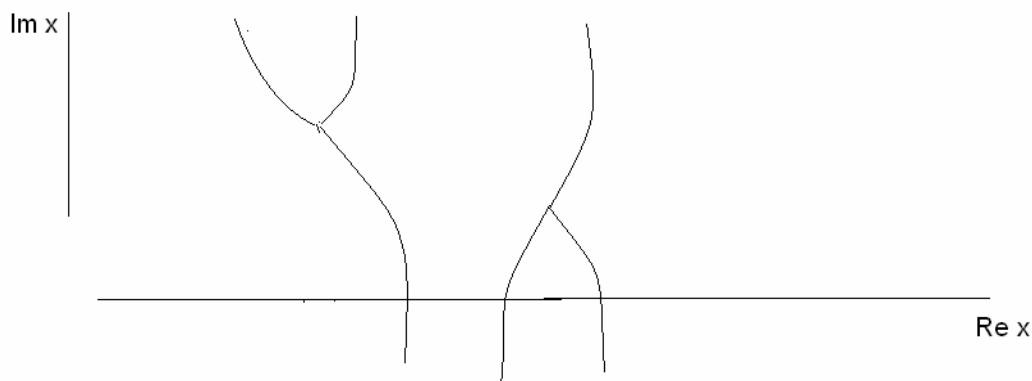


Рис. 3. Линии Стокса, не содержащие конечной линии и, следовательно, не вносящие вклад в спектр

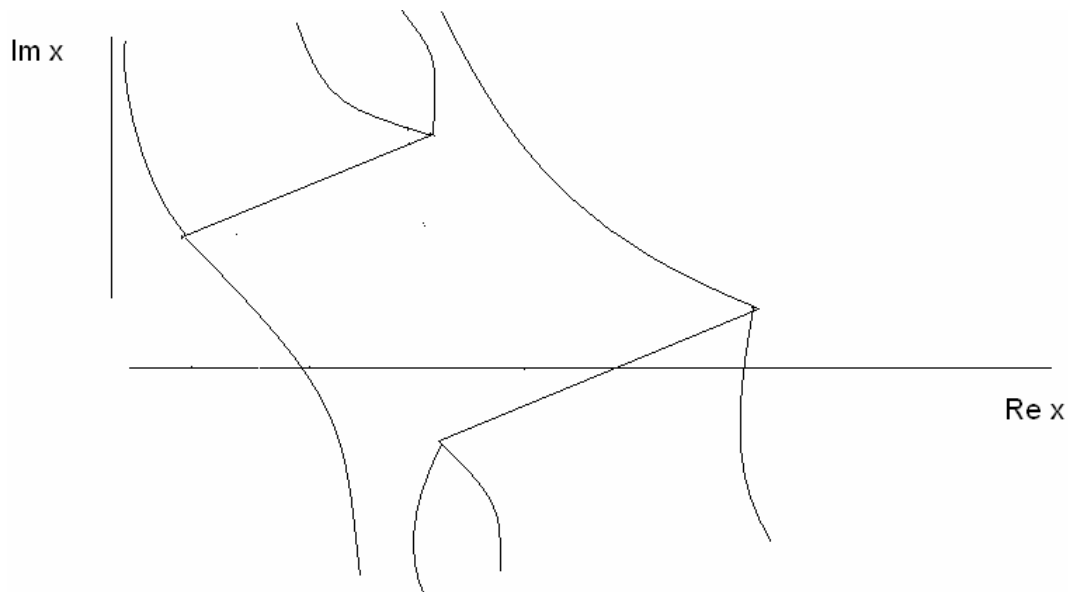


Рис. 4. Линии Стокса, содержащие конечную линию, которую можно обойти и, следовательно, также не вносящие вклад в спектр

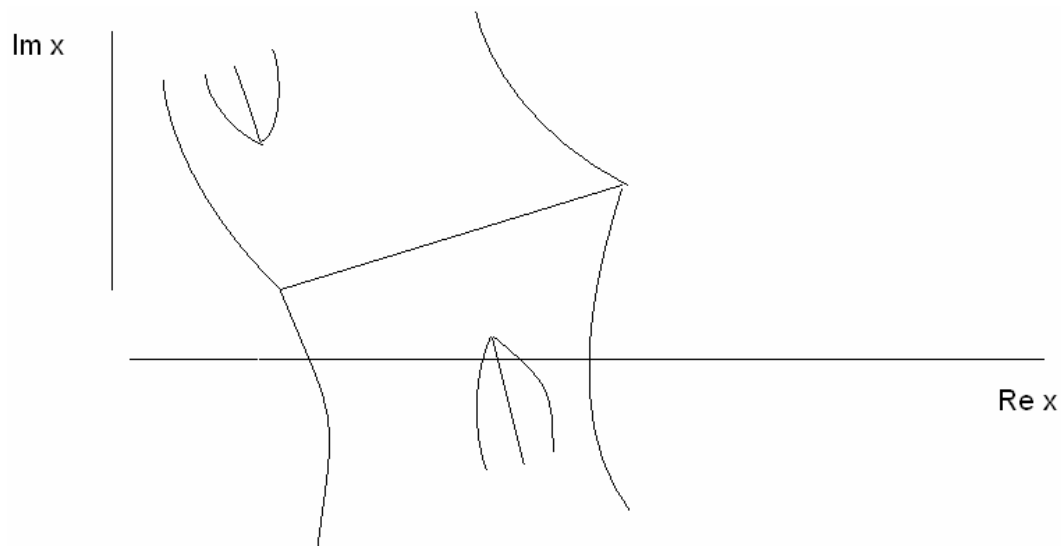


Рис. 5. Линии Стокса, содержащие конечную линию, которую нельзя обойти. Такой вариант будет давать вклад в спектр в виде некоторой кривой на комплексной плоскости E

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Евграфов М.А., Федорюк М.В.* Асимптотика решения уравнения $\omega'' - p(z, \lambda) = 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ в комплексной плоскости // УМН.-1966.-21, № 1-3.-С.50.
2. *Степин С.А. Аржанов А.А.* О локализации спектра в одной задаче сингулярной теории возмущения. УМН – 2002 .- 57, № 3.- 161-162.
3. *Федорюк М.В.* Топология линий Стокса уравнения второго порядка. Извести АН СССР, серия Математика – 1965.- 23, №3. – 645-656.
4. *Davies E.B.* Pseudospectra of differential operators. Operator Theory – 2000. – 43, - 243-262.

QUASICLASSICAL SPECTRUM OF SCHRÖDINGER'S OPERATOR WITH THE COMPLEX POTENTIAL

Esina A. I.

*Let's investigate equation $-h^2 y'' + i*V(x)y = Ey$. Where h -real parameter and $V(x) = \text{Cos}(x) + \text{Cos}(2x)$. When parameter h is fixed, question 'With what E this equation has an answer is a question 'What kind of spectrum has an operator $H(x, -ih \frac{\partial}{\partial x}) = -h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i*V(x)$. We are interested in asymptotic of this operator with $h \rightarrow 0$. In physics this limit is a limit of transit from quantum system to classical system*