

ПРОБЛЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Жидков Е. П., Волошина И. Г., Полякова Р. В., Перепелкин Е. Е.,
Российская Н. С., Шаврина Т. В., Юдин И. П.

В данной работе приводятся результаты численного моделирования сверхпроводящей магнитной фокусирующей системы. При моделировании этой системы проводился дополнительный контроль точности аппроксимации условия $u(\infty) = 0$ с использованием метода Ричардсона. В работе представлены также некоторые результаты сравнения расчетного распределения магнитного поля с проведенными измерениями поля модифицированного магнита СП-40 физической установки МАРУСЯ. Полученные результаты расчетов магнитных систем используются для проведения компьютерного моделирования физических установок и эксперимента на них, а в последующем, после проведения сеансов набора физических данных, будут использованы для обработки эксперимента

1. Введение. Значение численного моделирования [1] при исследовании магнитных систем определяется не только известными достоинствами вычислительного эксперимента, но и тем, что измерение магнитного поля является трудоемкой и дорогостоящей проблемой. Математическое моделирование дает также возможность исследовать те части конструкции магнита, измерения магнитного поля в которых или крайне затруднены, или даже невозможны.

Компьютерное моделирование дает возможность резко уменьшить время анализа поля в магните выбранной конфигурации, повысить точность, сократить стоимость и такого анализа, и самого магнита, т.е. математическое моделирование магнитной системы фактически является инструментом, позволяющим численным путем сделать выбор оптимальной магнитной системы в каждом конкретном случае.

В настоящей работе представлены описание программного обеспечения компьютерного моделирования задачи магнитостатики и результаты численного моделирования двух магнитных систем: 1) сверхпроводящей магнитной фокусирующей системы и 2) спектрометрического магнита СП-40 установки «МАРУСЯ».

2. Математическая постановка магнитостатической задачи

Рассмотрим физическую магнитную систему, состоящую из ферромагнетика (область Ω_f) и вакуума (область Ω_v) с замкнутыми токовыми обмотками (область Ω_c). Схема (разрез в медианной плоскости) одного из вариантов такой системы приведена на рисунке 1.

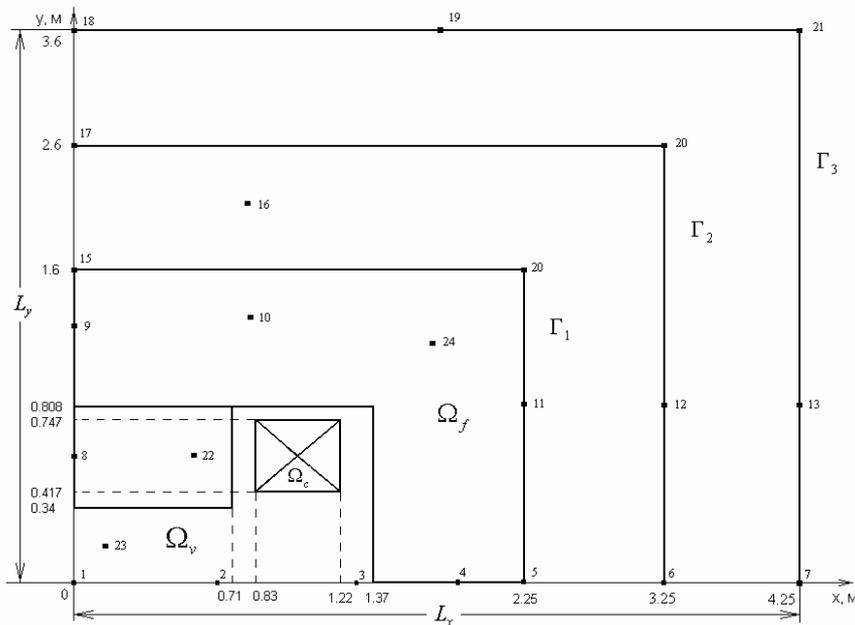


Рис. 1. Схема одного из вариантов магнитной системы СП-40 (1/4 часть)

Решается задача нахождения распределения магнитного поля, созданного стационарными токами и намагниченностью изотропных ферромагнетиков. Будем предполагать отсутствие поверхностных токов и токов, протекающих по ферромагнетику. Тогда уравнения Максвелла для стационарного магнитного поля примут вид:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(p) = \vec{J}(p), \quad \operatorname{div} \vec{B}(p) = 0, \quad \vec{B}(p) = \mu \mu_0 \vec{H}(p), \quad (1-3)$$

а условия на границе раздела сред и на бесконечности:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_f - \vec{B}_v) = 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_f - \vec{H}_v) = 0, \quad H(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \quad (4)$$

Здесь используются следующие обозначения: p – точка трехмерного пространства \mathbb{R}^3 , индексы f и v соответствуют области ферромагнетика и вакуума; \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля, \vec{B} – вектор магнитной индукции, \vec{J} – известный вектор объемной плотности тока, отличный от нуля в ограниченной области Ω_c и удовлетворяющий соотношению: $\int_{\Omega_c} \vec{J} d\Omega = 0$, $\mu(|\vec{H}|)$ – известная в ограниченной односвязной области Ω_f нелинейная функция магнитной проницаемости ферромагнетика (для немагнитной среды $\mu = 1$), μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности раздела сред ферромагнетик / вакуум.

Здесь используются следующие обозначения: p – точка трехмерного пространства \mathbb{R}^3 , индексы f и v соответствуют области ферромагнетика и вакуума; \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля, \vec{B} – вектор магнитной индукции, \vec{J} – известный вектор объемной плотности тока, отличный от нуля в ограниченной области Ω_c и удовлетворяющий соотношению: $\int_{\Omega_c} \vec{J} d\Omega = 0$, $\mu(|\vec{H}|)$ – известная в ограниченной односвязной области Ω_f нелинейная функция магнитной проницаемости ферромагнетика (для немагнитной среды $\mu = 1$), μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности раздела сред ферромагнетик / вакуум.

Будем предполагать, что продольный размер магнита вдоль оси OZ существенно больше поперечного размера. В таком приближении в плоскости поперечного сечения B_z - ой компонентой поля можно пренебречь по сравнению с B_x и B_y компонентами. Следовательно, векторный потенциал имеет только одну компоненту A_z .

Учитывая это, получим в двумерном случае уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = -\mu_0 J_z(x, y) \\ A_z|_{\Gamma_+} = A_z|_{\Gamma_-}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, \quad A_z|_{\Gamma_0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

где Γ – граница раздела сред ферромагнетик/вакуум. Условие на бесконечности заменено условием на вспомогательной границе Γ_0 (на рис. 1 соответственно $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$). Введем обозначения $A_z = u(x, y)$ и будем решать данную задачу относительно $u(x, y)$

3. Программное обеспечение для решения задачи магнитостатики

В работе [2] приводится подробное описание большого количества численных методов и соответственно программных продуктов для всех этапов решения магнитостатических задач. Отдавая должное специализированным пакетам программ для решения магнитостатических задач определенного типа, следует отметить вполне оправданное стремление разработчиков магнитных систем иметь инструмент математического моделирования магнитных систем простой в своем использовании и достаточно надежный в смысле полученных численных результатов, как в двумерном так и в трехмерном случаях.

I. Для решения магнитостатических задач в двумерном случае был создан комплекс программ, в основу которого положена система программ POISSON. В комплекс программ входят также:

- ◆ программа интеллектуальной поддержки (экспертная система) принятия решения для оптимального выбора конфигурации магнитной системы,
- ◆ программа полиномиального представления компонент магнитного поля с целью дальнейшего использования их в задачах динамики заряженных частиц,
- ◆ программа численного моделирования некоторого класса нелинейных обратных задач магнитостатики для математического моделирования безжелезных магнитных систем с прямоугольной апертурой [3].

Достоинством предлагаемого комплекса программ является также то, что он сформирован в виде библиотеки программ, которую можно постоянно пополнять или делать замену используемых программ. Как показывает опыт многолетнего использования системы программ POISSON многими пользователями, из всех известных программ такого класса она является наиболее удобной в эксплуатации и обладает достаточно высокими вычислительными (временными и точностными) характеристиками. POISSON включает в себя программы, позволяющие рассчитывать математические модели двумерных и аксиальносимметричных магнитов с учетом эффектов насыщения железа.

II. Для решения магнитостатических задач в трехмерном случае был создан комплекс программ [4] численного моделирования магнитных систем для скалярного потенциала. В этот комплекс программ включен алгоритм уточнения численных расчетов для задач, содержащих так называемые “угловые точки”.

В данной работе приводятся результаты компьютерного моделирования двух магнитных систем реальных физических установок.

4. Численное моделирование сверхпроводящей магнитной фокусирующей системы

Проектирование, оптимизация и создание криогенных электронно-лучевых ионизаторов (рис. 2) наряду с процессом длительного и трудоемкого физического моделирования в значительной мере опирается на численное моделирование распределения магнитного поля сверхпроводящего соленоида в рабочей области установки.

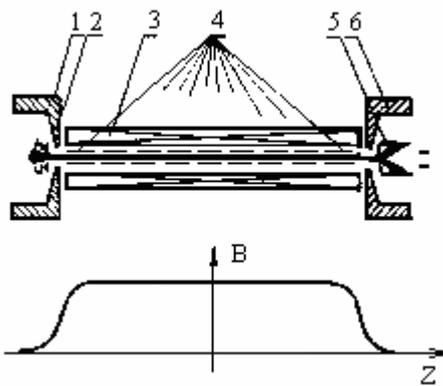


Рис. 2. 1-электронная пушка, 2, 6 – магнитные полюса, 3 – сверхпроводящий соленоид, 4 – трубки дрейфа, 5 – электронный коллектор

ну[5] условия $u(\infty) = 0$ на основе методики, использующей экстраполяцию по параметру R^{-1} , где

$$R = \max(L_x, L_y) \quad (6)$$

а L_x и L_y – длины сторон прямоугольника, ограничивающего расчетную область Ω (рис. 1). Используя численный алгоритм по Ричардсону часть конфигураций исследуемых магнитных систем просчитывались для двух радиусов R_1 и R_2 , соответствующих двум различным расчетным областям.

Для этого предполагается, что погрешность аппроксимации краевого условия $u(\infty) = 0$ разлагается в ряд по степени параметра R^{-1} . Решаются последовательно краевые задачи для последовательности расширяющихся областей Ω_k , $k = 1, \dots, N$ имеющих попарно различные значения R_k из (6). Далее сравниваются значения решений $u_k(Q)$ (при различных k) в контрольных точках Q расчетной области Ω . Если для выбранного $\varepsilon > 0$ выполняются условие

$$|u_k(Q) - u_{k+1}(Q)| \leq \varepsilon, \quad Q \in \Omega, \quad (7)$$

то полагаем, что удовлетворительно аппроксимирует краевое условие $u(\infty) = 0$.

Если априорно предположить, что существует регулярное разложение погрешно-

Распределение стационарного электромагнитного поля для изотропной среды в рассматриваемой системе моделировалось численно в предположении аксиальной симметрии. О правомерности этого предположения свидетельствуют экспериментальные диаграммы.

Рассматриваемая электрофизическая система является «открытой». Поэтому при проведении численных расчетов уделялось внимание вопросу аппроксимации краевого условия на бесконечности $u(\infty) = 0$.

В процессе численного моделирования сверхпроводящей магнитной фокусирующей системы проводился дополнительный контроль точности аппроксимации по Ричардсону

сти аппроксимации условия на бесконечности по параметру R^{-1}

$$u(Q) = u_R + \frac{1}{R^\alpha} g(Q) + o(R^{-\beta}), \quad \beta > \alpha > 0, \quad (8)$$

где $u(Q)$ – точное решение уравнения (5), а функция $g(Q)$ не зависит от R , тогда можно исключить второе слагаемое в (8) путем экстраполяции. Для этого определим числа γ_1, γ_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \\ \gamma_1 R_1^{-\alpha} + \gamma_2 R_2^{-\alpha} = 0, \quad R_1 \neq R_2, \end{cases} \quad (9)$$

где R_1, R_2 соответствуют двум различным расчетным областям. Тогда линейная комбинация

$$\bar{u}(Q) = \gamma_1 u_{R_1}(Q) + \gamma_2 u_{R_2}(Q) \quad (10)$$

удовлетворяет оценке $|u(Q) - \bar{u}(Q)| \leq o(R^{-\beta})$, т.е. приближает условие $u(\infty) = 0$ с большей точностью, чем каждое из u_{R_1} и u_{R_2} .

Приведем пример расчетов по этой схеме. В этих расчетах полагаем $\alpha = 2$, $R_1 = 1.6 \cdot 10^{-1}$, $R_2 = 2.0 \cdot 10^{-1}$, $R_3 = 2.5 \cdot 10^{-1}$

На рис.3 представлены графики функций $|\bar{B} - B(R_i)|$, $i = 1, 3$; \bar{B} соответствует \bar{u} . Наблюдается уточнение результатов в области, близкой к магнитному полюсу, где предъявляются более высокие требования к точности вычислений.

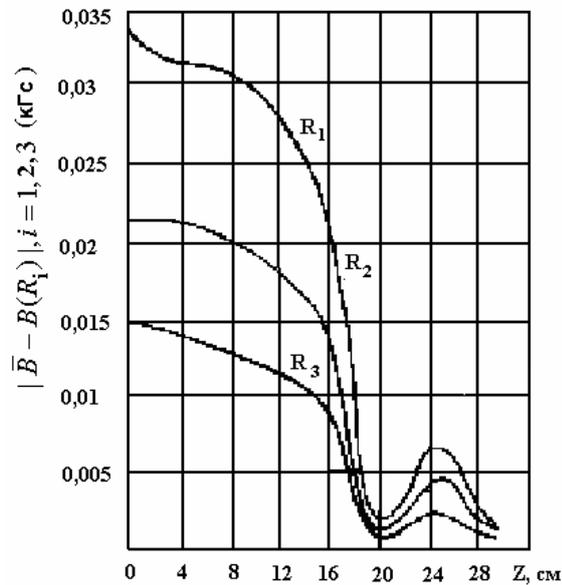


Рис. 3. Результаты уточнения решений с использованием аппроксимации условия $u(\infty) = 0$

Расчеты поля проводились отдельно для правого и левого магнитных полюсов. На общей границе расчетных областей ставилось краевое условие Неймана. На рис. 4 и 5 приведены результаты расчетов магнитного поля для обоих полюсов. Для сравнения приведены экспериментальные значения $B(z)$. Разность между экспериментальными и расчетными величинами находится в пределах точности измерений.

Полученные результаты показали, что в области магнитного полюса для электронного коллектора (рис. 4б) не обеспечивается необходимый спад магнитного поля. Последнее подтверждено и экспериментами с электронным пучком.

Численные эксперименты при возможном варьировании размеров области ферромагнетика показали, что достигнуть необходимого спада магнитного поля не удается

(рис. 5). Расчеты для другого типа наконечников, соответствующих двухсвязанной области $G_1 = G \cup G_2$ показали, что добавление ферромагнитного кольца G_2 позволяет, сохраняя требования к конструкциям, добиться необходимого спада магнитного поля на оси системы. Серия выполненных экспериментов позволила найти оптимальную форму и расположение дополнительной области G_2 , исходя из требований к данной конструкции.

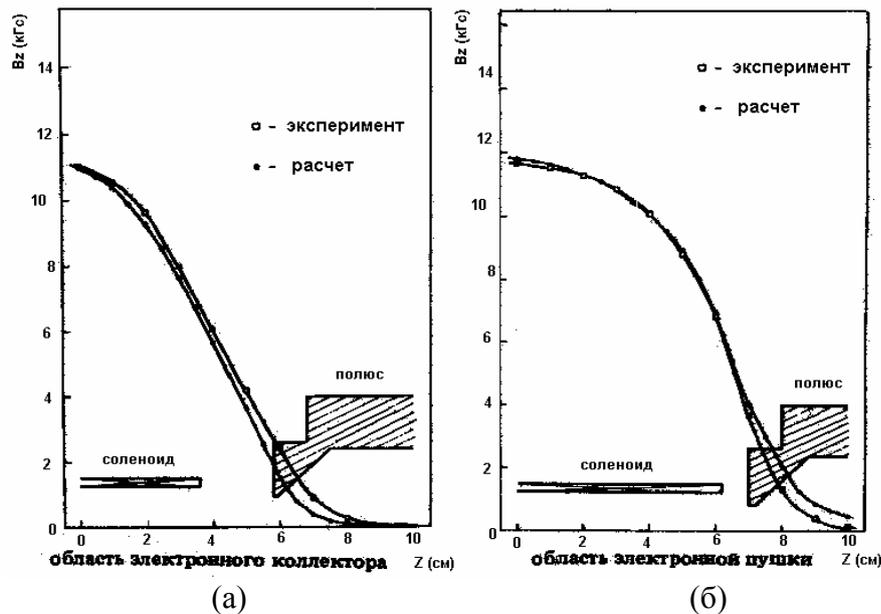


Рис. 4. Расчетное и измеренное магнитное поле

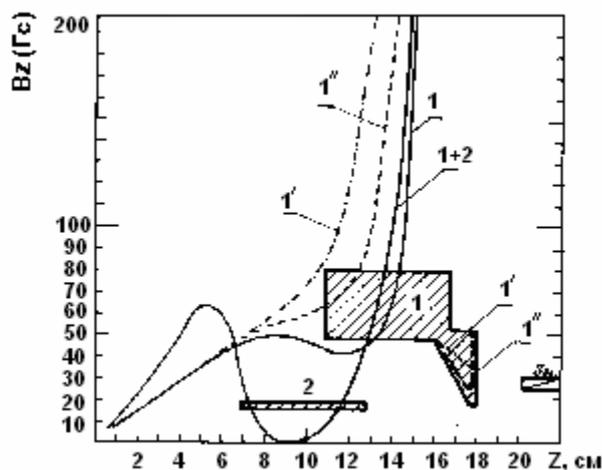


Рис. 5. Расчетное поле с добавлением кольца G_2

При этом создан банк данных, включающих информацию для широкого набора расчетных систем и соответствующей им карты поля, а также других пара-

Значение численного моделирования при конструировании рассматриваемой криогенной магнитной системы определяется не только известными достоинствами вычислительного эксперимента, но и техническими особенностями установки, в первую очередь наличием криогенных температур, затрудняющих проведение измерений магнитного поля. Благодаря достаточной точности выбранной математической модели, с помощью вычислительных экспериментов удалось решить проблему выбора и оптимизации формы маг-

метров, что позволило, с одной стороны, расширить «физическую» интуицию для дальнейшего развития электронно-лучевых ионных источников, а с другой – предложить возможность использования накопленных данных в качестве экспериментальных «заготовок» при конструировании подобных электрофизических установок. Отметим, что системы данного класса интенсивно развиваются и за рубежом.

5. Результаты расчетов и сравнение с измерениями магнитной системы установки МАРУСЯ

Магнит СП–40 используется в качестве анализирующего и отклоняющего магнита во многих спектрометрических установках, в частности в ОИЯИ (Дубна), ИФВЭ (Протвино) и других ядерных центрах России. Магнитооптические спектрометры с использованием магнита СП–40 создаются зачастую как многоцелевые, а иногда как сугубо специальные установки для исследований структуры ядерной материи на выведенных пучках ускорителя. В настоящей работе представлены некоторые результаты сравнения расчетного распределения магнитного поля с проведенными измерениями поля модифицированного магнита СП–40 с межполюсным зазором в 0.207 м. Более подробное описание численного моделирования магнитной системы СП–40 дано в работе [6].

В работе [4] изучается вопрос поведения магнитного поля в окрестностях так называемых «угловых точек» при помощи алгоритмов, которые дают наилучшую точность решения задач магнитостатики с прямоугольной апертурой (см. рис. 1).

Примером может служить краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в области, изображенной на рис. 6.

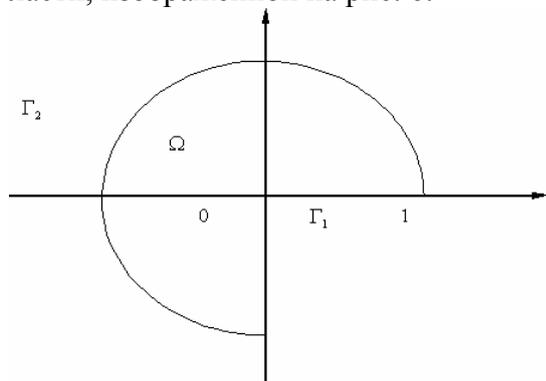


Рис. 6. Область «угловой точки»

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & p \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} = 0, \\ u|_{\Gamma_2} = \sin 2\varphi/3. \end{cases} \quad (11)$$

(r, φ) – полярная система координат; область $\Omega = \{(r, \varphi): 0 < r < 1, 0 < \varphi < 3\pi/2\}$, граница $\Gamma_1 = \Gamma' \cup \Gamma''$, где $\Gamma' = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1, \varphi = 0\}$, $\Gamma'' = \{(r, \varphi): 0 \leq r \leq 1, \varphi = 3\pi/2\}$, а граница

$$\Gamma_2 = \{(r, \varphi): r = 1, 0 < \varphi < 3\pi/2\}.$$

Задача (11) имеет решение $u = r^{2/3} \sin 2\varphi/3$. Запишем производные u_x и u_y . Получим $u_x = -(2/3)r^{-1/3} \sin \varphi/3, u_y = (2/3)r^{-1/3} \cos \varphi/3$. При $r \rightarrow 0$ производные u_x и u_y неограниченно растут. Поэтому, при решении таких задач численными методами необходимо учитывать характер поведения ее решения в окрестности угловой точки.

При численном расчете такой метод дает результаты по точности сравнимые с результатами, получаемыми на сетках в 4-5 раз большим числом узлов вдоль каждой оси, чем изначальная сетка.

На рис. 7 приведен график сравнения эксперимента (сплошные линии) с расчетом

(пунктирные линии) основной компоненты B_y при четырех токах 300 А, 600 А, 800 А, 1100 А в зависимости от поперечной координаты x при продольной координате $z = 0$. На рис.8 приводим зависимости $B_y(x, 0, z)$, $B_y(x, 0.05 \text{ м}, z)$, $B_x(x, 0.05 \text{ м}, z)$, $B_z(x, 0.05 \text{ м}, z)$ для тока 600 А. На рис.8а приведено распределение основной компоненты поля $B_y(x, 0, z)$ на медианной плоскости ($y = 0$). Область однородного поля на уровне 1.21 Тл находится целиком под полюсом магнита, спадая на краях полюса (и в поперечном направлении, и по пучку) до величин порядка 8 гаусс для $z = 2.50 \text{ м}$ ($x = y = 0$) и до 0 Гс в поперечном направлении для $x = 1.35 \text{ м}$ ($y = z = 0$).

На рис.8б приведено распределение основной компоненты поля $B_y(x, 0.05 \text{ м}, z)$ на плоскости $y = 0.05 \text{ м}$. Область однородного поля на уровне 1.21 Тл находится также под полюсом магнита. Далее поле спадает также на краях полюса (и в поперечном направлении, и по пучку) до величин порядка 5 гаусс для $z = 2.50 \text{ м}$ ($x = y = 0$) и до 0 в поперечном направлении для $x = 1.35 \text{ м}$ ($y = z = 0$).

На рис.8в приведено распределение поперечной компоненты поля $B_x(x, 0.05 \text{ м}, z)$ на плоскости $y = 0.05 \text{ м}$. На рис.8г приведено распределение продольной компоненты поля $B_z(x, 0.05 \text{ м}, z)$ на плоскости $y = 0.05 \text{ м}$. z равной 0.

С помощью компьютерного моделирования показано, что предлагаемая методика адекватно описывает нелинейные изменения формы магнитного поля СП–40 в зависимости от тока в обмотке. Таким образом, предлагаемая в работе методика расчета распределения магнитного поля может быть использована для моделирования магнитооптических систем и спектрометров.

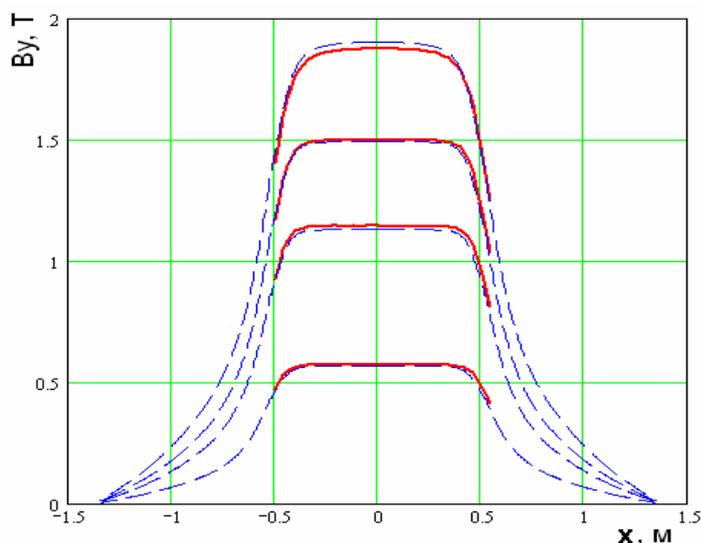


Рис. 7. Расчетная B_y компонента магнитного поля для $I=1100 \text{ А}$, 800 А , 600 А , 300 А . Сплошные линии – данные измерений

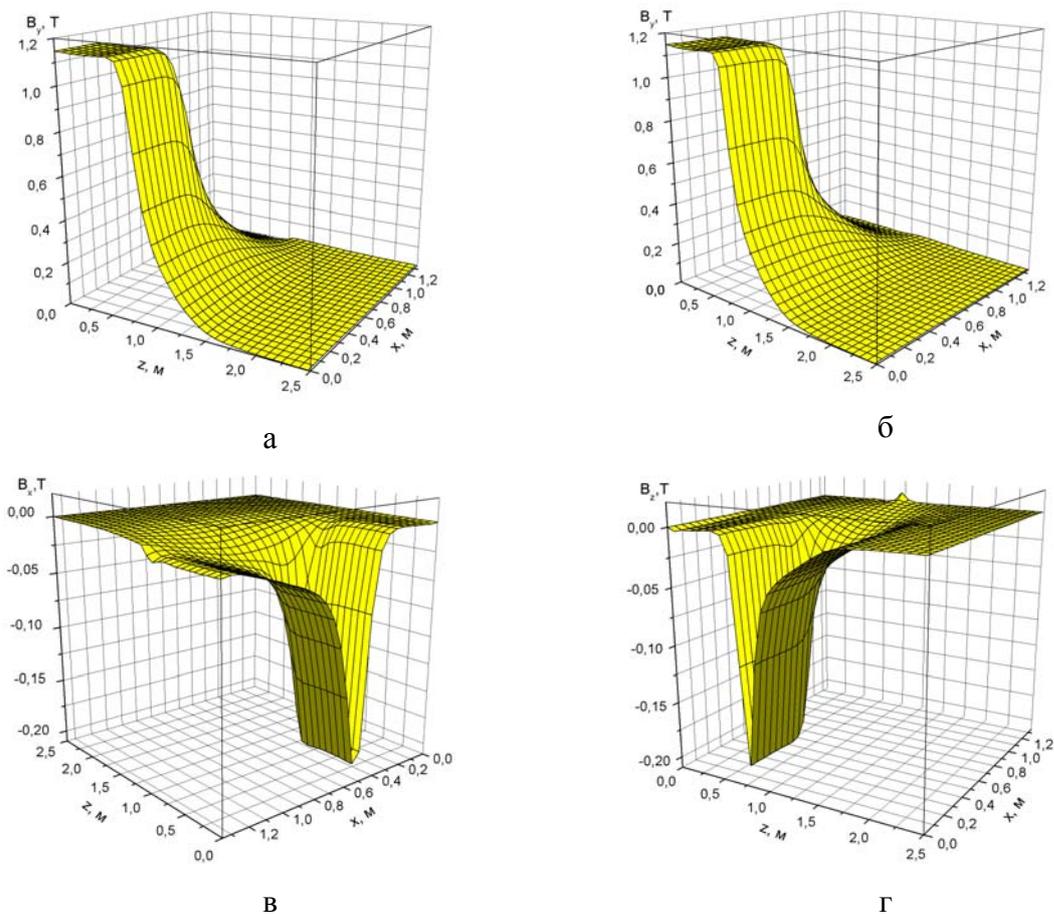


Рис. 8. Пространственное распределение компонент магнитного поля СП–40 при токе $I=600\text{A}$

Заключение. Создан комплекс программ, позволяющий решать широкий класс задач магнитостатики и накапливать банк данных численных моделей магнитных систем, что позволяет значительно облегчить и ускорить процесс создания и реконструкции магнитных установок. Многочисленные расчеты магнитных систем и сравнение численных расчетов с экспериментальными данными показали, что расчетное распределение магнитного поля в большинстве случаев с точностью 0.3% (или менее) совпадает с экспериментальными данными, что оказывается достаточным для проведения численного изучения влияния различных конструктивных параметров магнитной системы на величину и форму магнитного поля.

На базе метода Ричардсона разработан и использован численный алгоритм дополнительного контроля точности аппроксимации условия $u(\infty) = 0$, что, как показывают сравнения с экспериментальными данными, позволяет делать численное моделирование магнитных систем с большей точностью.

Разработан численный метод и алгоритм решения задач магнитостатики, который дает наилучшую точность решения в окрестностях так называемых «угловых точек», сравнимую с результатами, получаемыми на сетках в 4-5 раз большим числом узлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. Москва, Физматлит, 1997.
2. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В., Хоромский Б.Н., Шелаев И.А. Юдин И.П., Юлдашев О.И. Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц // ЭЧАЯ 1990. Т. 21. Вып.1. С. 251-307.
3. Жидков Е.П., Полякова Р.В., Юдин И.П. Регуляризация по А.Н. Тихонову в одной задаче магнитостатики // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научных трудов. Том. 1 / Под ред. Г.Ю.Ризниченко. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2006 г.С.171-177.
4. Yudin I.P., Perepelkin E.E. 3D-Field Calculations of Magnets by the Two Scalar Potential Method // Report N P-084 on ICAP-2004, S-Peterburg, 2004.
5. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. Препринт ОВМ АН СССР, N137, М., 1987.
6. Балдин А.А., Волошина И. Г., Полякова Р. В., Перепелкин Е. Е., Российская Н. С., Шаврина Т. В., Юдин И. П. Препринт ОИЯИ P11-2006-99, Дубна, 2006.

SOME PROBLEMS OF COMPUTER MODELING OF MAGNET SYSTEMS FOR PHYSICAL SETUPS

**Zhidkov E. P., Polyakova R. V., Voloshina I. G., Rossiyskaya N. S.,
Perepelkin E. E., Shavrina T. V., Yudin I. P.**

This work gives results of numerical simulation of a superconducting magnetic focusing system. When modeling this system, special care was taken to achieve approximation accuracy over the condition $u(\infty) = 0$ by using Richardson method. The work presents the results of comparison of the magnetic field calculated distribution with measurements of the field performed on a modified magnet SP-40 of MARUSYA physical installation. This work also presents some results of numeric analysis of magnetic systems of MARUSYA physical installation with the purpose to study an opportunity of designing magnetic systems with predetermined characteristics of the magnetic field