О ПРИМЕНЕНИИ ЗАДАЧИ МНОГОКРАТНОГО НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА В ЭКОЛОГИИ ПОВЕДЕНИЯ

Полушина Т. В.

Рассматривается применение задачи многократного наилучшего выбора в экологии поведения. Получены оптимальные процедуры, позволяющие эффективно анализировать поведение животных

Введение. Рассматривается применение обобщения задачи многократного наилучшего выбора [3], [4] к анализу поведения животных. Идея подхода основа на теории естественного отбора: эволюционный отбор проходят стереотипы поведения организмов, которые позволяют обеспечить максимальное воспроизводство себе подобных. Иначе говоря, максимизируется передаваемое из поколения в поколение число геновносителей данного типа поведения. Некоторые типы поведения животных, т.е. процесс принятия решений в условиях неполной информации, приводят к задаче оптимальной остановки. К их числу относится оптимальный выбор места питания и оптимальный выбор партнера для воспроизводства.

При выборе места питания организм движется через последовательность «пищевых» пятен, - пространственно разделенных участков, характеризующихся разной концентрацией пищи, - и должен остановиться на одном из них. Чем лучше будет его выбор, тем выше шансы на выживание потомства [19].

Другая важная задача в исследованиях экологии поведения – это процесс выбора партнера для воспроизводства. Животные обладают критериями оценки качества партнера с точки зрения его репродуктивной ценности по внешним признакам. В природе один из полов осуществляет выбор, сам процесс выбора осуществляется по схеме оптимальной остановки. В работах [2], [9], [12], [13], [14], [16], [17] для решения указанных задач используется теория оптимальных правил остановки, но рассматривается случай, когда требуется выбрать один объект (партнера или место питания). Однако представители некоторых видов животных могут последовательно выбирать больше одного партнера для воспроизводства [10], [11] или места питания. Сформулируем для этого случая постановку задачи.

Пусть имеется N объектов, упорядоченных по качеству, то есть можно указать, какой из них первый по качеству, какой - второй и т.д. Объекты поступают в случайном порядке один за другим, таким образом, все $N!$ перестановок равновероятны. Из сравнения любых двух уже поступивших объектов можно определить, какой из них лучше, а какой хуже, хотя их действительные ранги остаются неизвестными. После ознакомления с объектом можно или принять его (тогда выбор одного объекта сделан), или отвергнуть. Требуется найти оптимальную процедуру, обеспечивающую максимальную вероятность выбора k ($k \geq 2$) лучших объектов.

Математическая постановка. Опишем более формально рассматриваемую постановку задачи [4]. Пусть $(a_1, a_2,\ldots,a_N)$ – любая из $N!$ перестановок чисел $(1,2,\ldots,N)$ (число 1 соответствует лучшему объекту, N – худшему). В силу того, что объекты поступают в случайном порядке, то вероятность любой перестановки $(a_1, a_2,\ldots,a_N)$ равна $1/N!$.

Для каждого $s = 1, 2,\ldots, N$ определим $y_s = m$, если a_s является m-м по качеству среди объектов $(a_1,\ldots,a_s)$. Нетрудно показать [1], что $y_1,\ldots,y_N$ независимы и

$$\mathbf{P}\{y_s = j\} = \frac{1}{s},\ j=1,\ldots,s. \tag{1}$$

$$\mathbf{P}\{a_s=m|y_1=i_1,\ldots,y_{s-1}=i_{s-1},\ y_s=j\}=\mathbf{P}\{a_s = m \mid y_s=j\}=\frac{C_{m-1}^{j-1}C_{N-m}^{s-j}}{C_N^s}.$$

Пусть $(l)_k=(l_1,\ldots,l_k)$ - произвольная перестановка чисел 1, 2, …, k. Стратегию выбора $\tau^* = (\tau_1^*,\ldots,\tau_k^*), 1 \le \tau_1^* < \tau_2^* < \ldots < \tau_k^* < N$ назовем оптимальной, если

$$P\left\{\bigcup_{(l)_k}\{a_{\tau_1^*} = l_1,\ldots,a_{\tau_k^*} = l_k\}\right\} = \sup_\tau P\left\{\bigcup_{(l)_k}\{a_{\tau_1} = l_1,\ldots,a_{\tau_k} = l_k\}\right\} = P_N^*, \tag{2}$$

где $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_k)$.

Рассматриваемая задача состоит в нахождении оптимальной стратегии $\tau^* = (\tau_1^*,\ldots,\tau_k^*)$

Обозначим $Z_{(m)_k}^{(l)_k}$ условную вероятность события $\left\{a_{m_1} = l_1,\ldots a_{m_k} = l_k\right\}$ относительно σ-алгебры $F_{(m)_k}$, порожденной наблюдениями ($y_1,\ldots, y_{m_k}$), и положим

$$Z_{(m)_k} = \sum_{(l)_k} Z_{(m)_k}^{(l)_k}.$$

Тогда из (2) получаем цену игры

$$P_N^* = EZ_{\tau^*} = \sup_\tau EZ_\tau = v.$$

Таким образом, задача последовательного выбора k объектов редуцируется к задаче многократной остановки случайной последовательности $Z_{(m)_k}$ (см. [4]).

Найдем оптимальную стратегию выбора $\tau^* = (\tau_1^*,\ldots,\tau_k^*)$. Обозначим

$$B_i = \{\omega : y_{m_i} = j_i, y_{m_i+1} > i,\ldots, y_{m_{i+1}-1} > i\}, i = 1,2,\ldots,k-1. \tag{3}$$

Тогда, используя (1), (3),

$$Z_{(m)_k}^{(l)_k} = \frac{m_k(m_k-1)\cdot\ldots\cdot(m_k-k+1)}{N(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-k+1)}\cdot I\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i\right) I(y_{m_k} = j_k).$$

Согласно теореме 1 [4] оптимальная стратегия τ^* имеет вид

$$\tau_i^* = \min\left\{m_i > m_{i-1} : V_{(m)_i} = X_{(m)_i}\right\} \tag{4}$$

на множестве $D_{i-1} = \left\{\omega : \tau_1^* = m_1,\ldots,\tau_{i-1}^* = m_{i-1}\right\}$, $D_0 = \Omega,\ m_0 = 0$. Последовательность $V_{(m)_i}$ удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$V_{(m)_i} = \max\left\{X_{(m)_i}, E_{(m)_i}V_{(m)_{i-1},m_i+1}\right\}, \tag{5}$$

где $E_{(m)_i}V_{(m)_{i-1},m_i+1} = E\left(V_{(m)_{i-1},m_i+1} \mid F_{(m)_i}\right)$ и $X_{(m)_k} = Z_{(m)_k}$.

Далее, повторяя рассуждения [4], [5], получаем оптимальную стратегию τ^*. Существует такой набор $\pi^* = (\pi_1^*, ..., \pi_k^*)$, $1 \le \pi_1^* < ... < \pi_k^* \le N$, что:

$$\tau_1^* = \min[\min\{m_1 \ge \pi_1^* : y_{m_1} = 1\},\ N - k + 1],$$

$$\tau_i^* = \min[\min\{m_i > m_{i-1} : y_{m_i} = 1\},$$
$$\min\{m_i > m_{i-1} : m_i \ge \pi_2^*, y_{m_i} = 2\},$$
$$..., \min\{m_i > m_{i-1} : m_i \ge \pi_i^*, y_{m_i} = 1\}, N - k + i]$$

на множестве $D_{i-1} = \{\omega : \tau_1^* = m_1, ..., \tau_{i-1}^* = m_{i-1}\}$, $i=2,\ ...,\ k$, $D_0 = \Omega$. Наборы π^* и значения цены игры v при некоторых N и k приведены в таблице 1 [7].

Таблица 1. Наборы π^* и значения цены игры v

N/k	2	3	4	5
3	$\pi^* = (1, 3)$ $v = 0.5000$			
4	$\pi^* = (1,3)$ $\pi^* = (1, 4)$ $\pi^* = (2, 3)$ $\pi^* = (2, 4)$ $v = 0.3333$	$\pi^* = (1, 2, 4)$ $v = 0.4583$		
5	$\pi^* = (2, 4)$ $v = 0.3333$	$\pi^* = (1, 3, 5)$ $v = 0.3333$	$\pi^* =(1, 2, 4, 5)$ $v = 0.4333$	
6	$\pi^* = (2, 5)$ $v = 0.3139$	$\pi^* = (1, 3, 5)$ $\pi^* = (1, 3, 6)$ $\pi^* = (2, 3, 5)$ $\pi^* = (2, 3, 6)$ $\pi^* = (2, 4, 5)$ $\pi^* = (2, 4, 6)$ $v = 0.2500$	$\pi^* = (1, 3, 4, 6)$ $v = 0.3139$	$\pi^* =(1, 2, 4, 5, 6)$ $v = 0.4278$

Пример. Если $N = 5$, $k = 2$, то $v = 0.3333$, $\pi^*_1 = 2$, $\pi^*_2 = 4$. Тогда оптимальное правило имеет вид: необходимо пропустить первый объект, затем остановиться на первом объекте, который лучше всех предыдущих, или на четвертом объекте, если лучший не появился до момента 4; второй раз останавливаемся на первом объекте, который лучше всех предыдущих, или хуже, чем один объект (если просмотрено четыре объекта), в противном случае на последнем объекте.

Рассмотрим следующую случайную перестановку: 3, 5, 2, 1, 4. Значит, наблюдаемая последовательность относительных рангов $y_1, ..., y_5$: 1, 2, 1, 1, 4. Согласно правилу, следует остановиться на третьем (m_1=3, y_3=1) и на четвертом объектах (m_2=4, y_4=1). Таким образом, выбрано два лучших объекта.

Дадим интерпретацию этих значений с точки зрения экологии поведения. В работе [15] изучалось поведение гуппи (Poecilia reticulata). Наблюдаемые объекты оценивались по внешним признакам – площади оранжевого узора. Самкам первой группы последовательно демонстрировали обладателей меньшего количества оранжевого узора (‘plain’) и большего (‘showy’). Наблюдаемые относительные ранги $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ и $N = 2$. Второй группе самцов представляли в обратном порядке. Наблюдаемые относительные ранги $y_1 = 1$, $y_2 = 2$ и $N = 2$. Было установлено, что самки первой группы чаще спаривались во второй раз.

Самки обыкновенного (гладкого) тритона (Triturus vulgaris) также в течение одного сезона последовательно выбирают несколько разных партнеров [10]. В этом случае критерием отбора служит высота спинного гребня: низкий (4.0 – 6.5 мм), высокий (8.5 - 10.0 мм) и очень высокий (11.0 – 13.0 мм). Данный эксперимент проходил в три этапа. На первом этапе демонстрировались самцы с высоким гребнем ($a_1 = 2$), на втором – с низким ($a_2 = 3$), на третьем – с очень высоким ($a_3 = 1$). Таким образом, N= 3 и наблюдаемые относительные ранги $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 1$. Результаты эксперимента приведены в таблице 2.

Таблица 2. Поведение самок тритона при трех спариваниях

	$a_1 = 2$		$a_2 = 3$		$a_3 = 1$	
спаривание	+	-	+		+	-
количество	16	12	0	16	10	6

При N=3 набор $\pi^*_1 = 1$, $\pi^*_2 = 3$ (см. табл. 1), что соответствует поведению 10 из 16 самок тритона.

Задача многократного наилучшего выбора с конечной памятью. В рассматриваемой выше постановке предполагалось, что возвращение к отвергнутому ранее объекту невозможно. Однако в некоторых случаях это не так. Например, соловей (Luscinia megarhynchos) может возвращаться к просмотренным ранее территориям [8]. Будем считать, что наблюдатель обладает конечной памятью M. Для случая однократной остановки подобная задача рассмотрена в [18].

Определим $\lambda_s = \lambda_s(\boldsymbol{a})$, $s = 1,\ldots,N$ - последовательность векторов, перестановка чисел 1, 2, …, s, соответствующих относительному качеству объектов, просмотренных к моменту s. Обозначим $q^k(\lambda_s)$ - номер элемента k в перестановке (1, 2, ..., s), $k \le s$.

При этом целевая функция будет следующей: $Z_{(m)_k}^{(l)_k}$ - условная вероятность события $\left\{a_{q^{l_1}(\lambda_{m_1})} = l_1, \ldots a_{q^{l_k}(\lambda_{m_k})} = l_k\right\}$ относительно σ -алгебры $F_{(m)_k}$, порожденной наблюдениями $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m_k}$.

Повторяя приведенные выше рассуждения и [5], [6], замечаем, что при

$$u_{(m)_i} = E_{(m)_{i-1},m_i-1} V_{(m)_{i-1},m_i}$$

имеет место соотношение

$$u_{(m)_i} = E_{(m)_{i-1},m_i-1}\left(\max\left\{X_{(m)_i}, u_{(m)_{i-1},m_i+1}\right\}\right).$$

Из равенства $X_{m_1} = u_{m_1,m_1+1}$ получаем, что $E_{m_1}V_{m_1+1} = EV_{m_1+1}$. Из (4) и (5) следует

$$\tau_1^* = \min\left\{m_1 \ge 1 : u_{m_1,m_1+1} \ge EV_{m_1+1}\right\}.$$

Иначе это можно записать в следующем виде:

$$\tau_1^* = \min\left\{m_1 : y_{q^1(\lambda_{m_1})} \in \Gamma_{1,m_1}\right\},\ \Gamma_1 = \left(\Gamma_{1,1},...,\Gamma_{1,N-k+1}\right),$$
$$\Gamma_{1,s} \subseteq \{1\},\ s = 1,...,N-k,$$
$$\Gamma_{1,N-k+1} = \{1,2,...,N-k+1\},$$

где $\Gamma_{1,i}$ - определяемое заранее остановочное множество.

Таблица 3. Наборы π^* и значения v

N \ M	1	2	3	4	5	6
3	$\pi^* = (1, 3)$ $v = 0.500$	$\pi^* = (2, 3)$ $v = 0.667$	$\pi^* = (2, 4)$ $v = 1.000$			
4	$\pi^* = (1, 3)$ $\pi^* = (1, 4)$ $\pi^* = (2, 3)$ $\pi^* = (2, 4)$ $v = 0.333$	$\pi^* = (2, 4)$ $v = 0.583$	$\pi^* = (3, 4)$ $v = 0.625$	$\pi^* = (3, 4)$ $v = 1.000$		
5	$\pi^* = (2, 4)$ $v = 0.333$	$\pi^* = (2, 5)$ $v = 0.467$	$\pi^* = (3, 5)$ $v = 0.567$	$\pi^* = (4, 5)$ $v = 0.600$	$\pi^* = (4, 5)$ $v = 1.000$	
6	$\pi^* = (2, 5)$ $v = 0.314$	$\pi^* = (2, 6)$ $v = 0.383$	$\pi^* = (3, 6)$ $v = 0.517$	$\pi^* = (4, 6)$ $v = 0.569$	$\pi^* = (4, 5)$ $\pi^* = (5, 6)$ $v = 0.583$	$\pi^* = (5, 6)$ $v = 1.000$

Чтобы определить вид $\tau_i^*, i = 2,...,k$, заметим, что наше решение остановиться или нет в момент времени m_i зависит от значения целого набора векторов (λ_1, …, λ_{m_i}). Таким образом,

$$\tau_i^* = \min\left\{m_i > m_{i-1} : y_{q^i(\lambda_{m_i})} \in \Gamma_{i,m_i}(y_{q^1(\lambda_{m_1})},....,y_{q^{i-1}(\lambda_{m_{i-1}})})\right\},$$
$$\Gamma_i = (\Gamma_{i,i},...,\Gamma_{i,N-k+i}),$$
$$\Gamma_{i,N-k+i} = \{1,2,...,N-k+i\},$$
$$\Gamma_{i,s} \subseteq \{1,...,s\} \cap \{1,...,i\},\ s = i,...,N-k+i-1.$$

Наборы множеств $\Gamma_1,...,\Gamma_k$ определяются индукцией назад.

Приведем таблицу наборов π^* и значения цены игры v при некоторых N и M для $k = 2$ (табл. 3). Заметим, что при $M = 1$ задача сводится к рассмотренной выше классической задаче многократного наилучшего выбора.

Автор благодарит Софронова Г. Ю. за постановку задачи, а также полезные обсуждения и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березовский Б. А., Гнедин А. В.* Задача наилучшего выбора. М.: Наука, 1984. 196 с.
2. *Мазалов В. В., Домбровский Ю. А., Перрин Н.* Теория оптимальной остановки: приложения к экологии поведения // Обозр. прикл. и промышл. математ. 1994. Т. 1, вып. 6. С. 893-900.
3. *Николаев М. Л.* Об одном обобщении задачи наилучшего выбора. // Теория вероятн. и ее примен.1977. Т. 22, вып. 1. С. 191-194.
4. *Николаев М. Л.* Оптимальные правила многократной остановки. // Обозр. прикл. и промышл. математ. 1998. Т. 5, вып. 2. С. 309-348.
5. *Николаев М.Л., Софронов Г.Ю., Полушина Т.В.* Задача последовательного выбора нескольких объектов с заданными рангами // Изв. ВУЗов. С.-К.рег. Ест.науки. 2007. Т. 4. С. 11-14.
6. *Полушина Т.В*. Об обобщении задачи Гусейн-Заде // Обозр. прикл. и промышл. математ. 2007. Т. 14, вып. 2. С. 225-229.
7. *Софронов Г.Ю., Кроуз Д.П., Кейтз Д.М., Николаев М.Л.* Об одном способе моделирования порогов в задаче многократного наилучшего выбора // Обозр. прикл. и промышл. математ. 2006. Т. 13, вып. 6. С. 975-983
8. *Amrhein V., Kunc H. Naguib M.* Non-territorial nightingales prospect territories during the dawn chorus // Proc.R.Soc.Lond B. 2004. Vol.271. P. 167-169.
9. *Dombrovsky Y., Perrin N.* On adaptive search and optimal stopping mate choice // Am. Nat. 1994. Vol. 144. P. 355-361.
10. *Gabor C., Halliday T.* Sequential mate choice by multiply mating smooth newts: females become more choosy // Behav. Ecol. 1997. Vol. 8. P. 162-166.
11. *Hain T*., *Neff B*. Multiple paternity and kin recognition mechanisms in a guppy population // Molecular Ecology. 2007. Vol. 16. P. 3938-3946.
12. *Hutchinson J.M.C., Halupka K.* Mate choice when males are in patches: optimal strategies and good rules of thumb // J. Theor. Biol. 2004. Vol. 231 P. 129-151.
13. *Janetos A. C.* Strategies of female choice: a theoretical analysis // Behav. Ecol. Sociobiol. 1980. Vol. 7. P. 107-112.
14. *Parker G. A*. Mate quality and mating decisions. // Cambridge University Press, Cambridge, New York. 1983. P. 141-166.
15. *Pitcher T.E, Neff B.D., Rodd F.H., Rowe L*. Multiple mating and sequential mate choice in guppies: females trade up // Proc. R. Soc. Lond. 2003. B. 270. P. 1623-1629.
16. *Real L*. Search theory and mate choice. I. Models of single sex-discrimination // Am. Nat. 1990. 136. P. 376—405.
17. *Real L*. Search theory and mate choice. II. Mutual interaction, assortative mating, and equilibrium variation in male and female fitness // Am. Nat. 1991. Vol. 138. P. 901-917.
18. *Smith M.H. Deely J.J.* A secretary problem with finite memory // Jour. Of Am.Stat.Ass. 1975. Vol.70. P.357-361.
19. *Stephens D.W., Krebs J.R*. Foraging theory // Princeton University Press, Princeton, N.J. 1986.

THE APPLICATION OF THE BEST MULTIPLE CHOICE PROBLEM IN BEHAVIORAL ECOLOGY

Polushina T. V.

The application of the best multiple choice problem in behavior ecology is considered. Optimal procedures for effective animal behavior analysis are obtained