

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КУРСОВОЙ СТОИМОСТИ АКЦИЙ НА РОССИЙСКОМ ФОНДОВОМ РЫНКЕ

Парамонов А. В., Щетинин Е. Ю.

В работе проведена количественная характеристика некоторых эмпирических эффектов, сопутствующих процессу изменения курсовой стоимости акций на российском фондовом рынке. Предложена математическая модель процесса, описываемая стохастическим уравнением Фоккера—Планка с неоднородным коэффициентом диффузии. Показано, каким образом предложенная модель может быть использована для решения актуальной практической задачи краткосрочного прогноза значений курсовой стоимости акций и биржевых показателей.

Эмпирические эффекты. Процессы изменения финансовых показателей на современных финансовых рынках обладают сложной, существенно нелинейной структурой. Известно, что эмпирические распределения приращений финансовых показателей являются в общем случае асимметричными и обладают степенными хвостами, а динамика этих процессов характеризуется кластеризацией волатильности и медленным угасанием автокорреляционной функции квадратов приращений [1, 2].

Эти эмпирические эффекты свойственны и процессам изменения курсовой стоимости акций крупных российских компаний. Характерное поведение эмпирических распределений в области экстремальных значений на коротких ($\Delta t = 15$ мин) временных интервалах подробно описано в работе [3]. Показано, что эти распределения обладают выраженными степенными хвостами.

Известно также, что на более длинных временных интервалах ($\Delta t > 1$ неделя) распределения приближаются к нормальному. Свойства эмпирических распределений существенно зависят от выбранного масштаба времени.

Для многих типов финансовых показателей характер зависимости начальных моментов эмпирических распределений от масштаба времени хорошо описывается степенным законом [1, 2, 4]:

$$M_n(\Delta X(\Delta t)) = C_n \cdot (\Delta t)^{\kappa_n}. \quad (1)$$

Были рассчитаны оценки начальных моментов порядков $n = 1, 2, 4$ для выборок логарифмических приращений (лог. доходностей) курсовой стоимости акций крупных российских компаний, а также индекса ММВБ в период с 1999 по 2007 гг. Значения временных интервалов взяты в пределах от 5 минут до 1 месяца. Обнаружено,

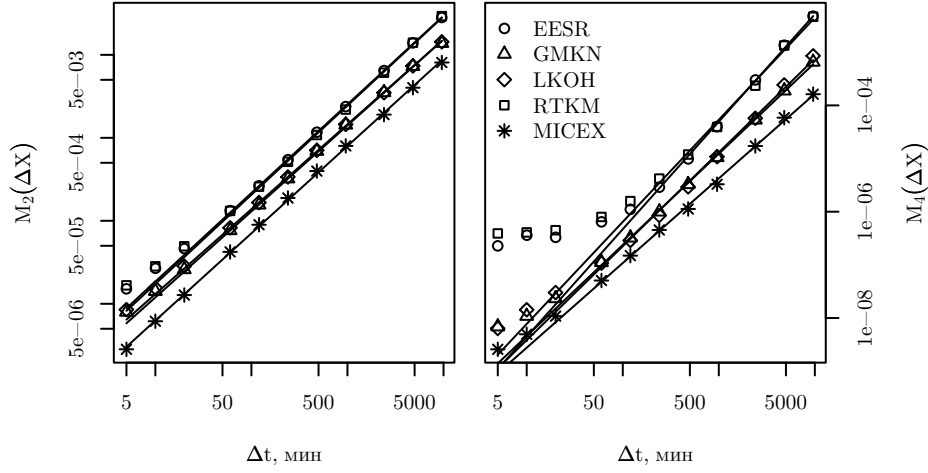


Рис. 1. Зависимость моментов эмпирических распределений лог. приращений от масштаба времени. Линиями обозначена аппроксимация степенной функцией.

что во всех случаях характер зависимости начальных моментов от величины интервала приращения также хорошо описывается соотношением (1).

Обнаруженная закономерность отражает важные свойства нелинейного стохастического процесса, порождающего наблюдаемую каскадную структуру эмпирических распределений. Использование классических эконометрических методов стохастического анализа, в частности основанных на авторегрессионных моделях типа GARCH [5], для описания такого рода процессов и структур является неэффективным. Указанные подходы позволяют с приемлемой точностью описать распределения для отдельных временных интервалов, но не связывающие их закономерности [6].

Математические модели и методы. Мы рассматриваем изменение финансовых показателей как *марковский процесс*, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением Фоккера—Планка [7]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} p(x, \tau) = \left(-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, \tau) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, \tau) \right) p(x, \tau), \quad (2)$$

где $x = \Delta X$ — значение приращения показателя курсовой стоимости за интервал времени $\Delta t = \Delta t_0 e^{-\tau}$,

$$D^{(1)}(x, \tau) = -x, \quad (3)$$

$$D^{(2)}(x, \tau) = \alpha(\tau) + \beta(\tau) \cdot x^2. \quad (4)$$

Необходимо обратить внимание на направление времени стохастического процесса τ , которое в данном случае *противоположно* естественному направлению времени Δt . Уравнение (2) справедливо и для условных функций плотности распределения $p(x_2, \tau_2 | x_1, \tau_1)$, $\tau_1 < \tau_2$.

Количественное оценивание параметров модели $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ может быть произведено непосредственно по исходным данным с использованием значений начальных моментов безусловных эмпирических распределений. Умножив обе части уравнения (2) на x^n и интегрируя по x , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} M_n(x(\tau)) &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k D^{(k)}(x, \tau) p(x, \tau) dx \\ &= \sum_{k=1}^2 \frac{n!}{(n-k)!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-k} D^{(k)}(x, \tau) p(x, \tau) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражения для $D^{(1)}(x, \tau)$, $D^{(2)}(x, \tau)$ и используя сокращенное обозначение $M_n(\tau) = M_n(x(\tau))$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} M_2(\tau) = -2M_2(\tau) + 2\alpha(\tau) + 2\beta(\tau)M_2(\tau), \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} M_4(\tau) = -4M_4(\tau) + 12\alpha(\tau)M_2(\tau) + 12\beta(\tau)M_4(\tau). \quad (7)$$

Используя выражения для M_n , записанные в координатах стохастического процесса, получаем:

$$-\kappa_2 M_2(\tau) = -2M_2(\tau) + 2\alpha(\tau) + 2\beta(\tau)M_2(\tau), \quad (8)$$

$$-\kappa_4 M_4(\tau) = -4M_4(\tau) + 12\alpha(\tau)M_2(\tau) + 12\beta(\tau)M_4(\tau). \quad (9)$$

Система линейных алгебраических уравнений (8)–(9) позволяет найти значения функций α , β для каждого момента времени τ . Ниже приведено решение системы.

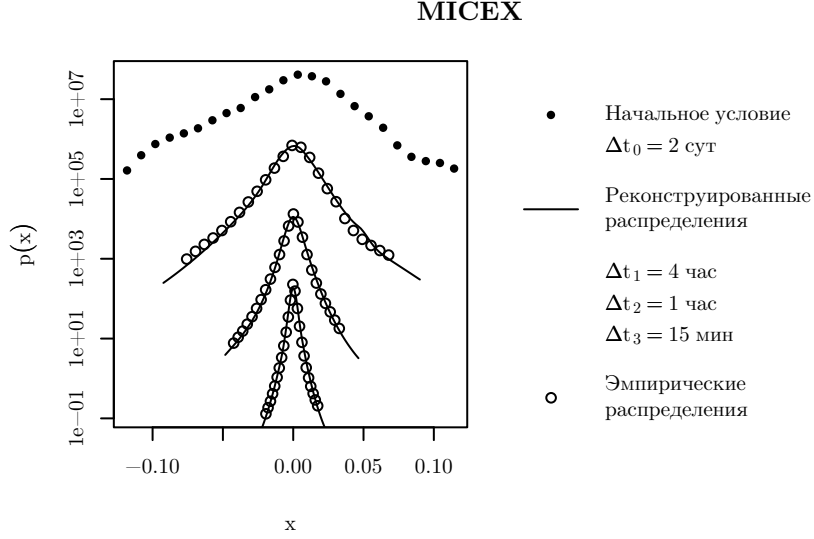


Рис. 2. Реконструкция распределений лог. приращений фондового индекса ММВБ. Для облегчения восприятия профили функций плотности распределения смещены по оси ординат.

$$\alpha(\tau) = \frac{M_2(\tau)}{12} \cdot \frac{(8 - 6\kappa_2 + \kappa_4)M_4(\tau)}{M_4(\tau) - M_2^2(\tau)}, \quad (10)$$

$$\beta(\tau) = \frac{1}{12} \cdot \frac{(4 - \kappa_4)M_4(\tau) + (-12 + 6\kappa_2)M_2^2(\tau)}{M_4(\tau) - M_2^2(\tau)}. \quad (11)$$

Решение уравнения (2) было произведено численно методом Монте—Карло. По функциям распределения 2-суточных логарифмических приращений реконструированы распределения для более коротких временных интервалов (вплоть до 15 минут). Во всех случаях обнаружено хорошее соответствие между эмпирическим и предсказанным распределениями.

Параметры модели $D^{(1)}(x, \tau)$, $D^{(2)}(x, \tau)$ являются симметричными функциями относительно x . Тем не менее, предложенная модель позволяет получать асимметричные функции распределения, в случае если начальное условие является асимметричным.

Таким образом, предложенная модель позволяет естественным образом описать наблюдаемые эмпирические эффекты:

1. Асимметрия распределений приращений финансовых показателей;

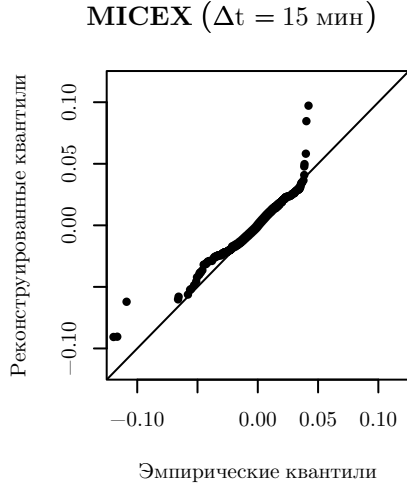


Рис. 3. Квантили эмпирического и реконструированного распределений 15-минутных лог. приращений фондового индекса ММВБ.

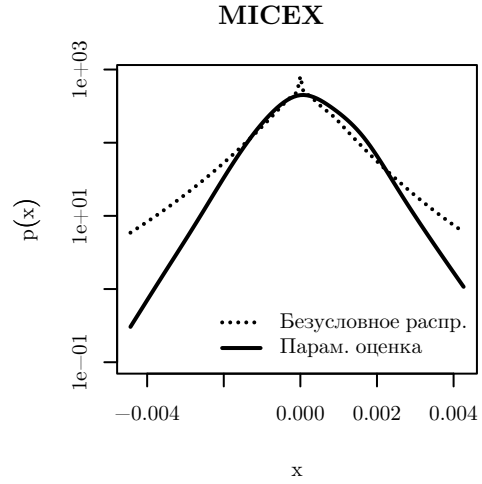


Рис. 4. Условное распределение 5-минутных лог. приращений фондового индекса ММВБ.

2. Тяжелые (степенные) хвосты распределений на малых временных интервалах;
3. Лёгкие (экспоненциальные) хвосты распределений на больших временных интервалах.

Краткосрочный прогноз. Математический прогноз заключается в построении условной функции распределения будущих значений финансового показателя по известным значениям в прошлом. Напомним, что рассматриваемый стохастический процесс по предположению является марковским, т.е.

$$p(x_n, \tau_n | x_{n-1}, \tau_{n-1}, \dots, x_1, \tau_1) = p(x_n, \tau_n | x_{n-1}, \tau_{n-1}), \quad (12)$$

для всех $x_1, x_2, \dots, x_n, \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n$. Формула полной вероятности для марковского процесса имеет вид

$$p(x_n, \tau_n, \dots, x_1, \tau_1) = p(x_n, \tau_n | x_{n-1}, \tau_{n-1}) \cdot p(x_{n-1}, \tau_{n-1}, \dots, x_1, \tau_1). \quad (13)$$

Рекурсивно используя (13), получаем формулу для расчёта вероятности изменения значения финансового показателя:

$$p(x_n, \tau_n, \dots, x_1, \tau_1) = p(x_n, \tau_n | x_{n-1}, \tau_{n-1}) \cdot \dots \cdot p(x_2, \tau_2 | x_1, \tau_1) \cdot p(x_1, \tau_1). \quad (14)$$

На Рис. 4 приведен профиль условной функции плотности распределения 5-минутных логарифмических приращений фондового индекса ММВБ, рассчитанный по 12 последовательным значениям данного финансового показателя за предшествующий час (выборка от 24 декабря 2007 г.). В настоящей работе значения условных вероятностей $p(x_k, \tau_k | x_{k-1}, \tau_{k-1})$ получены путём численного решения уравнения (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 *R. Mantegna, H. E. Stanley* An introduction to Econophysics // Cambridge University Press. 1999.
- 2 *A. Arneodo, J.—F. Muzy, D. Sornette* Causal cascade in the stock market from the “infrared” to the “ultraviolet” // European Physical Journal B. 1998. Vol. 2. P. 277–282.
- 3 *Щетинин Е. Ю.* Статистический анализ свойств структур экстремальных зависимостей на российском фондовом рынке // Финансы и кредит. 2005. №22(190). С. 44–51.
- 4 *Ch. Renner, J. Peincke, R. Friedrich* Evidence of Markov properties of high frequency exchange rate data. // Physica A. 2001. 3. Vol. 298. P. 499–520(22).
- 5 *T. Bollerslev* Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. Vol. 31. P. 307–327.
- 6 *R. Brummelhuis, D. Guegan* The Time Scaling of Value-at-Risk in GARCH(1,1) and AR(1)—GARCH(1,1) Processes // Journal of Risk. 2007. Vol. 9(4). P. 39–94.
- 7 *H. Risken* The Fokker-Planck equation // Springer-Verlag. 1984.

MODELLING THE DYNAMICS OF PRICE FLUCTUATIONS AT RUSSIAN STOCK MARKET

Paramonov A. V., Shchetinin Ye. Yu.

The price fluctuations at Russian stock market are described by a number of empirical effects or “stylized facts”. We perform a quantitative characterization of some of these effects, and propose a model of the underlying stochastic process based on nonlinear Fokker-Planck equation. We show how the model can be applied for short-term forecast of stock prices and market index values.