КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА - ПЛАНКА С КВАДРАТИЧНОЙ ДИФФУЗИЕЙ В МОДЕЛЯХ ДОХОДНОСТЕЙ АКТИВОВ

Шаповалов А. В., Трифонов А. Ю., Масалова Е. А.

Рассматривается метод построения квазиклассических асимптотических решений уравнения Фоккера-Планка с коэффициентом диффузии квадратичным по пространственной переменной и линейным коэффициентом дрейфа с нелокальной нелинейностью в моделях оценки доходностей активов

Введение. Оценка кредитных рисков и доходностей активов является одной из основных задач в практике финансового менеджмента кредитных институтов. Международные требования к измерению капитала и стандартов капитала (см., например, [1] поощряют активность банков в измерении и обработке данных о вероятностях финансовых рисков. Растущая потребность в надежных мерах кредитных рисков и оценке доходностей активов вызывает интерес к теоретическим моделям наряду с накоплением, систематизацией и обработкой многочисленных практических данных. В известных моделях оценок кредитных рисков [2] и доходностей активов [3, 4] используется теория стохастических уравнений в формализме уравнения Фоккера-Планка (ФП) [5] с коэффициентами, зависящими от времени и координат. Зависимость коэффициента диффузии от координат, в частности, квадратичная зависимость, приводит к негауссовым распределениям, согласующимся с эмпирическими данными [3, 4]. Решения уравнения ФП в указанных моделях, как правило, строятся численно, поскольку возможности методов точного интегрирования в данном случае ограничены. В работе [6] рассматривалась модель доходностей активов с эффектом стохастической обратной связи, математическое описание которой основывалось на уравнении ФП с нелокальной нелинейностью в виде зависимости коэффициентов уравнения от первого момента плотности распределения. Предполагается, что стохастическая обратная связь на рынке активов возникает, когда в нем участвует некоторая совокупность активов взаимодействующих таким образом, что на изменение цены некоторого выделенного актива оказывают влияние изменения цен остальных активов, т.е. на образование цены данного актива оказывает влияние состояние рынка в целом. Описание такого влияния посредством введения в коэффициенты уравнения ФП зависимости от первого момента согласуется с концепцией среднего поля (см., например, [7]).

Для нелинейного уравнения ФП с постоянной диффузией в [6] построено точное аналитическое выражение для соответствующего нелинейного оператора эволюции, с помощью которого решается задача Коши с начальными условиями произвольного вида. В случае, когда квадратичная по координате часть коэффициента диффузии предполагается малой, в [6] построено приближенное решение уравнения ФП в рамках регулярной теории возмущений.

В данной работе продолжена разработка аналитических методов решения уравнения ФП с нелокальной нелинейностью и квадратичной дисперсией на основе результатов работ [6, 8]. Получены аналитические выражения, определяющие нелинейный оператор эволюции в квазиклассическом приближении. Отметим, что из соображений простоты рассматривается уравнение ФП с одной пространственной переменной. Обобщение на многомерный случай не вызывает принципиальных трудностей.

Уравнение Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью. Обозначим временной ряд котировок актива через $\xi(t)$. В работе [6], в соответствии с [3, 4], для описания корреляций изменений цен актива $x = \xi(t+\Delta t) - \xi(\mathrm{t})$ на различных временных интервалах Δt применялось нелинейное уравнение ФП для функции распределения $u(x,\tau)$

$$\partial_\tau u(x,\tau) = \left[-\partial_x D^{(1)}(x,\tau) + \partial_{xx} D^{(2)}(x,\tau) \right] u(x,\tau) \ . \qquad (1)$$

В работе [3] в качестве эволюционной переменой вместо переменной Δt использовалась переменная $\tau = \log(\Delta T/\Delta t)$, где ΔT — наибольший временной интервал, пределу $\Delta t \to 0$ соответствует $\tau \to \infty$, $\partial_\tau = \partial/\partial\tau$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_{xx} = \partial_x \partial_x$. Коэффициент дрейфа $D^{(1)}(x,\tau)$ и коэффициент диффузии $D^{(2)}(x,\tau)$ в уравнении (1) выбираются в виде

$$D^{(1)}(x,\tau) = -\alpha x - \kappa X_u(\tau) , \qquad (2)$$

$$D^{(2)}(x,\tau) = \varepsilon(f(\tau) + (a x + g(\tau)))^2 , \qquad (3)$$

где α, a, ε, κ — вещественные положительные параметры, $f(\tau)(\geq 0)$, $g(\tau)$ — вещественные функции. Влияние состояния рынка в целом на изменение цены рассматриваемого актива, следуя [7], учитывается первым моментом $X_u(\tau)$ функции распределения

$$X_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x u(x,\tau)\, dx \ . \qquad (4)$$

Из уравнения (1) непосредственно следует, что $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,\tau)\, dx$ не зависит от τ. Тогда нормировка начальной функции $u(x,\tau_0)$, $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,\tau_0)\, dx = 1$, приводит к условию $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,\tau)\, dx = 1$, которое будем с читать выполненным.

Коэффициент дрейфа вида (2) получается из следующих соображений. Уравнение ФП в общем случае можно записать в виде [5]

$$\partial_\tau u(x,\tau) = \partial_x \left[-V_x(x,\tau) + D^{(2)}(x,\tau)\partial_x \right] u(x,\tau) \ ,$$

где $V_x(x,\tau) = \partial_x V(x,\tau)$, $V(x,\tau)$ — потенциал регулярного внешнего воздействия на систему, например, потенциал внешней регулярной силы в уравнении Ланжевена для импульса частицы [5]. В предположении о том, что на фондовом рынке участвуют несколько взаимодействующих активов, в рамках концепции среднего поля, следуя [7], модифицируем уравнение ФП, заменив

$$V_x(x,\tau) \to V_x(x,\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} W_x(x-y,\tau)\, \mathrm{u(y,\tau)d\tau} \ . \qquad (5)$$

В этом выражении интеграл моделирует совокупное влияние рынка на изменение цены x выделенного актива. Потенциал самодействия $W(x-y,\tau)$ выбран зависящим от разности $x-y$ из соображений симметричности взаимного влияния активов. В соответствии с результатами работ [3, 4, 9], в которых линейное выражение для коэффициента дрейфа $V_x(x,\tau)=\tilde{\alpha}x$ хорошо аппроксимирует эмпирические данные, выберем модифицированный коэффициент дрейфа (5) в виде $-\tilde{\alpha}x+\kappa\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-y)\mathrm{u}(\mathrm{y},\tau)\mathrm{d}\tau$, что можно записать как $-\alpha x-\kappa X_u(\tau)$, $\alpha=\tilde{\alpha}-\kappa$, т.е. получаем выражение (2).

Отметим, что в работе [3] на основе анализа эмпирических данных котировок валют для коэффициентов для $D^{(1)}(x,\tau)$ и $D^{(2)}(x,\tau)$ получены следующие аппроксимации:

$$D^{(1)}(x,\tau)=-0.44x\,, \tag{6}$$

$$D^{(2)}(x,\tau)=0.003e^{-\tau/2}+0.019(x+0.04)^2\,. \tag{7}$$

В работе [9] уравнение (1) использовалось для описания вероятностей ценовых приращений x котировок акций РАО ЕЭС за различные промежутки времени $\Delta t=\tau$. Из анализа имеющихся данных приращений котировок в [9] получены следующие оценки

$$D^{(1)}(x,\tau)=-1.02x\,, \tag{8}$$

$$D^{(2)}(x,\tau)=0.11\,\tau+0.22\,x\,. \tag{9}$$

Таким образом, выражения (2), (3) обобщают эмпирические зависимости (6) — (9).

Для оценки параметра κ в (2) воспользуемся сделанным предположением о том, что коэффициент $\kappa X_u(\tau)$ отражает влияние рынка изменение цены x выделенного актива. Количественной характеристикой состояния фондового рынка в целом в экономическом анализе служат рыночные индексы. В качестве возможного способа расчета параметра κ можно предложить следующее выражение:

$$\kappa=\Delta I/\Delta\tau I_0\,.$$

Здесь τ_0 — начальный момент, I_0 — значение фондового индекса, рассчитанного на момент τ_0, ΔI — изменение индекса на некотором специально подобранном временном интервале $\Delta\tau$. Для валютного рынка, где индексы не используются, вместо изменения индекса можно использовать, например, изменение детерминанта соответствующей матрицы корреляций. Подчеркнем, что оценка параметра κ представляет собой предмет самостоятельного исследования.

Аналитические выражения, определяющие нелинейный оператор эволюции для уравнения ФП (1) с нелокальной нелинейностью в виде первого момента $X_u(\tau)$ в коэффициентах дрейфа (2) и с квадратичной диффузией вида (3), существенно используют оператор эволюции уравнения вида (1), (2) с постоянной диффузией $D^{(2)}(x,\tau)=\varepsilon$, найденный в [6, 8]. Приведем вид этого оператора.

Оператор эволюции уравнения ФП с постоянной диффузией. Положив в (1) коэффициент диффузии постоянным, $D^{(2)}(x,\tau)=\varepsilon$, запишем уравнение ФП (1) — (3) в виде

$$\partial_\tau u(x,\tau)=\left[\partial_x(\alpha x+\kappa X_u(\tau))+\varepsilon\partial_{xx}\right]u(x,\tau) \; . \tag{10}$$

Выберем $\tau=s$ в качестве начального момента и рассмотрим задачу Коши

$$u(x,s)=\gamma(x) \; . \tag{11}$$

Начальное распределение $\gamma(x)$ предполагается нормированным, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\gamma(x)\,dx=1$. Для первого момента (4) из (10), (11) непосредственно следует

$$\dot{X}_u(\tau)=-(\alpha+\kappa)X_u(\tau) \; , \tag{12}$$

откуда

$$X_u(\tau)=X_\gamma\exp\left[-(\alpha+\kappa)(\tau-s)\right] \; , \tag{13}$$

где $X_\gamma=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\gamma(x)\,dx=X_u(s)$ — начальное значение первого момента. Подстановка (13) в нелинейное уравнение ФП (10) эффективно линеаризует его. В [6, 8] решение задачи Коши (10), (11) получено в виде действия на начальное распределение $\gamma(x)$ нелинейного оператора эволюции $U(\tau,s)$, определяемого выражением

$$u(x,\tau)=\hat{U}(\tau,s)\gamma(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_l(\tau,s,x-X_u(\tau),y-X_\gamma)\gamma(y)\,dy \; . \tag{14}$$

Здесь

$$G_l(\tau,s,x,y)=\frac{e^{\frac{\alpha}{2}(\tau-s)}}{\sqrt{\left(4\pi\varepsilon/\alpha\right)\sinh\alpha(\tau-s)}}\exp\left[-\frac{\alpha e^{\alpha(\tau-s)}}{4\varepsilon\sinh\alpha(\tau-s)}\left(x-e^{-\alpha(\tau-s)}y\right)^2\right] \tag{15}$$

есть функция Грина линейного уравнения ФП, которое получается из (10) при $\kappa=0$. Отметим, что ядро интегрального оператора (14), (15) зависит от начального распределения $\gamma(x)$ через первые моменты $X_u(\tau)$ и X_γ, поэтому оператор эволюции $U(\tau,s)$ нелинеен.

Квазиклассическое приближение. Рассмотрим уравнение ФП (1) с коэффициентами (2), (3). Из (1), (2), (3) по аналогии с (12) получим уравнение, определяющее первый момент (4) в виде

$$\dot{X}_u(\tau)=-(\alpha+\kappa-2a^2\varepsilon)X_u(\tau)+2a\varepsilon g(\tau) \, , \tag{16}$$

интегрируя которое, находим

$$X_u(\tau) = X_\gamma e^{-(\alpha+\kappa-2a^2\varepsilon)(\tau-s)} + 2a\varepsilon\int_s^\tau e^{-(\alpha+\kappa-2a^2\varepsilon)(\tau-\xi)}\, g(\xi)\,d\xi\,. \tag{17}$$

Подстановка (17) в (2) эффективно линеаризует уравнение ФП (1) с коэффициентами (2), (3), поскольку коэффициенты $D^{(1)}(x,\tau)$, $D^{(2)}(x,\tau)$ после подстановки в них выражения (17) можно считать известными функциями. Для полученного таким образом уравнения ФП построим главный член формального асимптотического ряда для оператора эволюции в квазиклассическом приближении. В качестве асимптотического параметра в (1) выберем параметр ε , входящий в коэффициент диффузии (3).

Перейдем в уравнении (1) с коэффициентами (2), (3) к новым переменным: $(x,\tau)\to(y,\tau)$, где

$$y = \frac{1}{a}\log\left(ax + g(\tau) + \sqrt{f(\tau) + (ax+g(\tau))^2}\right). \tag{18}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\partial_\tau u(y,\tau) = \left[\frac{q(y,\tau)}{A_{(+)}(y,\tau)}\partial_y + \alpha + \varepsilon\,\partial_{yy}\right]u(y,\tau)\ . \tag{19}$$

Здесь использованы обозначения

$$A_{(\pm)}(y,\tau) = e^{ay} \pm f(\tau)e^{-ay}\,, \tag{20}$$

$$q(y,\tau) = 2\left(\kappa X_u(\tau) - \frac{\alpha}{a}g(\tau) - \frac{\dot g(\tau)}{a}\right) - \frac{\dot f(\tau)}{a}e^{-ay} + \left(\frac{\alpha}{a} + a\varepsilon\right)A_{(-)}(y,\tau)\,. \tag{21}$$

Введем класс функций $\mathcal{P}_\varepsilon^\tau$ с общим элементом вида

$$\Phi(y,\tau,\varepsilon) = \varphi\left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\varepsilon}},\tau,\varepsilon\right), \qquad \Phi(y,\tau,\varepsilon)\in\mathcal{P}_\varepsilon^\tau\ ,$$

где $\Delta y = y - Y(\tau,\varepsilon)$. Вещественная функция $Y(\tau,\varepsilon)$ является функциональным параметром класса, регулярно зависит от ε и подлежит определению. Функция $\varphi(\xi,\tau,\varepsilon)$ гладко зависит от ξ и τ, убывает на бесконечности, $\xi\to\infty$, и регулярно зависит от ε при $\varepsilon\to 0$, т.е. функция может быть разложена в степенной ряд по ε в окрестности $\varepsilon=0$. Функции класса $\mathcal{P}_\varepsilon^\tau$ нормированы условием

$$\|\Phi(\tau,\varepsilon)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi^2(y,\tau,\varepsilon)\,dy < \infty\ .$$

Рассмотрим частный случай, когда $Y(\tau,\varepsilon)$ не зависит от ε , т.е. $Y(\tau,\varepsilon)=Y(\tau)$. Будем искать решения уравнения (19), локализованные в окрестности точки кривой $y=Y(\tau)$ для каждого фиксированного $\varepsilon\in(0,1]$ и $\tau\ge 0$. Решения из класса $\mathcal{P}_\varepsilon^\tau$ мы называем траекторно сосредоточенными решениями.

Для функций класса $\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\tau}$ непосредственно получаются следующие оценки:

$$\left\|(\Delta y)^k \Phi(\tau,\varepsilon)\right\| \Big/ \left\|\Phi(\tau,\varepsilon)\right\| = O(\varepsilon^{k/2}), \quad \left\|(\varepsilon\partial_y)^k \Phi(\tau,\varepsilon)\right\| \Big/ \left\|\Phi(\tau,\varepsilon)\right\| = O(\varepsilon^{k/2}), \tag{22}$$

$$\left\|(\varepsilon\partial_\tau + \dot{Y}(\tau)\partial_y)\Phi(\tau,\varepsilon)\right\| \Big/ \left\|\Phi(\tau,\varepsilon)\right\| = O(\varepsilon). \tag{23}$$

Для построения асимптотического решения заменой переменных $(y,\tau) \to (\xi,\tau)$, где y дается выражением (18), а

$$\xi = \frac{y - Y(\tau)}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{24}$$

приведем уравнение (19) к виду

$$\hat{L}\varphi(\xi,\tau,\varepsilon) = \left[-\partial_\tau + \alpha + \frac{\dot{Y}(\tau)}{\sqrt{\varepsilon}}\partial_\xi + \partial_{\xi\xi} + \frac{q(\sqrt{\varepsilon}\xi + Y(\tau),\tau)}{A_{(+)}(\sqrt{\varepsilon}\xi + Y(\tau),\tau)} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\partial_\xi \right] \varphi(\xi,\tau,\varepsilon) = 0. \tag{25}$$

Здесь $q(\sqrt{\varepsilon}\xi + Y(\tau),\tau)$, $A_{(+)}(\sqrt{\varepsilon}\xi + Y(\tau),\tau)$ определяются выражениями (20), (21). Переход к переменным (ξ,τ) удобен тем, что для операторов умножения на ξ вида (24) и ∂_ξ справедливы оценки $\xi \sim O(1)$, $\partial_\xi \sim O(1)$. Разложим коэффициенты уравнения (25) и функцию $\varphi(\xi,\tau,\varepsilon)$ в степенной ряд по $\sqrt{\varepsilon}$, например, для функции $\varphi(\xi,\tau,\varepsilon)$ разложение имеет вид

$$\varphi(\xi,\tau,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(\xi,\tau) + \sqrt{\varepsilon}\,\varphi^{(1)}(\xi,\tau) + \cdots. \tag{26}$$

Приравняв в полученном разложении коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\varepsilon}$ с учетом оценок (22), (23), получим следующие уравнения, определяющие асимптотическое решение уравнения (25):

$$\dot{Y}(\tau) + \frac{1}{A_{(+)}(Y(\tau),\tau)} \left[2\left(\kappa X_u(\tau) - \frac{\alpha}{a} g(\tau) - \frac{\dot{g}(\tau)}{a} \right) - \frac{\dot{f}(\tau)}{a} e^{-aY(\tau)} + \frac{\alpha}{a} A_{(-)}(Y(\tau),\tau) \right] = 0, \tag{27}$$

$$\hat{L}_{(0)}\varphi^{(0)}(\xi,\tau) = 0, \tag{28}$$

$$\hat{L}_{(0)}\varphi^{(1)}(\xi,\tau) = -\hat{L}_{(1)}\varphi^{(0)}(\xi,\tau). \tag{29}$$

Здесь обозначено

$$\hat{L}_{(0)} = -\partial_\tau + \partial_{\xi\xi} + \xi R(\tau)\partial_\xi + \alpha, \quad \hat{L}_{(1)} = \left(Q(\tau)\xi^2 + a\frac{A_{(-)}(Y(\tau),\tau)}{A_{(+)}(Y(\tau),\tau)} \right)\partial_\xi,$$

$$R(\tau) = \frac{1}{A_{(+)}(Y(\tau),\tau)} \left(\dot{f}(\tau)e^{-aY(\tau)} + \alpha A_{(+)}(Y(\tau),\tau) + aA_{(-)}(Y(\tau),\tau)\dot{Y}(\tau) \right),$$

$$Q(\tau) = -a\frac{A_{(-)}(Y(\tau),\tau)}{A_{(+)}(Y(\tau),\tau)} R(\tau) + \frac{a}{2A_{(+)}(Y(\tau),\tau)} \left(-\dot{f}(\tau)e^{-aY(\tau)} + \alpha A_{(-)}(Y(\tau),\tau) + aA_{(+)}(Y(\tau),\tau)\dot{Y}(\tau) \right).$$

Функция (26) с учетом (27) – (29) удовлетворяет уравнению (26) с точностью $O(\varepsilon)$ в следующем смысле: $\hat{L}\left(\varphi^{(0)}(\xi,\tau)+\sqrt{\varepsilon}\,\varphi^{(1)}(\xi,\tau)\right)=g^{(2)}(\xi,\tau,\varepsilon)$, $\dfrac{\left\|g^{(2)}(\tau,\varepsilon)\right\|}{\left\|\varphi(\tau,\varepsilon)\right\|}=O(\varepsilon)$.

Уравнение (27) определяет кривую $x=Y(\tau)$ в окрестности точки которой в момент τ локализовано решение уравнения (28).

Заменой независимых и зависимых переменных

$$\varphi^{(0)}(\xi,\tau)=e^{\alpha(\tau-s)}v(z,\tau')\,,\ \tau'=\int_s^\tau h^2(\eta)\,d\eta\,,\ z=h(\tau)\xi\,,\ h(\tau)=h(s)\exp\left(\int_s^\tau R(\eta)\,d\eta\right) \tag{30}$$

уравнение (28) приводится к уравнению диффузии $\left[-\partial_{\tau'}+\partial_{zz}\right]v(z,\tau')=0$, функция Грина которого есть

$$G_{st}(\tau',0,z,z')=\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau'}}\exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\tau'}\right]. \tag{31}$$

В (30) начальному значению $\tau=s$ соответствует $\tau'=0$. С помощью функции Грина (31) для начальной функции $v(z,0)=v_0(z)$ решение задачи Коши дается выражением

$$v(z,\tau')=\int_{-\infty}^{\infty}G_{st}(\tau',0,z,z')\,v_0(z')dz'\,, \tag{32}$$

а для неоднородной задачи $\left[-\partial_{\tau'}+\partial_{zz}\right]u(z,\tau')=F(z,\tau')$, $u(z,0)=0$ имеем

$$u(z,\tau')=\int_0^{\tau'}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}G_{st}(\tau'-\eta,0,z,z')\,F(z',\eta)dz'. \tag{33}$$

Построим асимптотическое решение вида (26) задачи Коши

$$\varphi(\xi,s)=\gamma(\xi) \tag{34}$$

для уравнения (25). С этой целью заменим переменные (z,τ') на (ξ,τ) в (32) в соответствии с (30) и получим решение задачи Коши $\varphi^{(0)}(\xi,s)=\gamma(\xi)$ для уравнения (28),

$$\varphi^{(0)}(\xi,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha(\tau-s)}}{\sqrt{4\pi\int_s^\tau h^2(\eta)d\eta}}\exp\left[-\frac{(h(\tau)\xi-h(s)\xi')^2}{4\int_s^\tau h^2(\eta)d\eta}\right]\gamma(\xi')h(s)d\xi'\ . \tag{35}$$

Здесь использованы соотношения: $z'=h(s)\xi'$, $\gamma(\xi')=v_{(0)}(z')=v_{(0)}(h(s)\xi')$. Аналогично, в соответствии с (33) для функции $\varphi^{(1)}(\xi,\tau)$, определенной уравнением (29), с учетом (33) имеем

$$\varphi^{(1)}(\xi,\tau)= \int_s^\tau d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha(\tau-\eta)}}{\sqrt{4\pi\int_\eta^\tau h^2(y)dy}} \exp\left[-\frac{(h(\tau)\xi-h(\eta)\xi')^2}{4\int_\eta^\tau h^2(y)dy}\right] F(\xi',\eta)h(\eta)d\xi' . \qquad (36)$$

Здесь $F(\xi,\tau)=-\hat{L}_{(1)}\varphi^{(0)}(\xi,\tau)$. Таким образом, выражения (35), (36) дают асимптотическое с точностью $O(\varepsilon)$ решение вида (26) задачи Коши (34) для уравнения (25). Эти выражения определяют оператор эволюции уравнения (25), переводящий начальную функцию $\varphi(\xi,s)=\gamma(\xi)$ в функцию $\varphi(\xi,\tau)$ вида (26).

Заключение. Предложенный подход позволяет проанализировать влияние нелинейности фондового рынка на динамику распределений изменений цен активов. Такой анализ с необходимостью предполагает статистическую обработку соответствующих эмпирических данных фондовых рынков с целью оценки параметров применяемых моделей, что выходит за рамки данной работы и является предметом отдельного исследования. Предварительные расчеты показывают, что распределения, полученные с помощью выражений (26), (35), (36) для начальных распределений со степенными асимптотиками («толстыми хвостами»), сохраняют негауссов характер асимптотики в процессе эволюции.

Предложенный подход, связанный с построением оператора эволюции в квазиклассическом приближении для уравнения ФП (1), допускает обобщение на многомерный случай. Кроме того, предложенный подход можно обобщить на случай нелинейных уравнений ФП более общего вида. Например, когда в уравнении (1) коэффициенты (2) и (3) имеют вид $D^{(1)}(x,\tau)=-\alpha x-\kappa\beta(\tau)$, $D^{(2)}(x,\tau)=\varepsilon(f(\tau)+(ax+g(\tau)))^2$, где функции $\beta(\tau)$, $f(\tau)$, $g(\tau)$ зависят от $X_u(\tau)$. В этом случае вместо уравнения (16) получим уравнение $\dot{X}_u(\tau)=-(\alpha-2a^2\varepsilon)X_u(\tau)-\kappa\beta(\tau)+2a\varepsilon g(\tau)$. Решение задачи Коши $X_u(s)=X_\gamma$ для этого уравнения отличается от (17) и определяется зависимостью коэффициентов $\beta(\tau)$, $f(\tau)$, $g(\tau)$ от $X_u(\tau)$. Подстановка найденного решения $X_u(\tau)$ в уравнение ФП позволяет его линеаризовать и, следовательно, применить описанный выше подход.

Работа частично поддержана грантом Президента РФ поддержки научных школ НШ-871.2008.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Basel Committee on Banking Supervision*. Consultative Document. The Internal Ratings-Based Approach. – Basel: Bank for internal settlements, 2001. — 102 p.
2. *Hui C. H. and Lo C.F.* Effect of asset value correlation on credit-linked note values //Int. J. Theor. Appl. Finance. 2002. Vol. 5. P. 455–478.
3. *Friedrich R., Peinke J., Renner, Ch.* How to quantify deterministic and random influence on the statistics of the foreign exchange market // Phys.Rev. Lett. 2000. Vol. 84, No. 22. P. 5224 – 5227.
4. *Sornette D*. Fokker-Planck equation of distributions of financial returns and power laws // Physica A. 2001. Vol. 290. P. 211–217.

5. *Gardiner C. W.* Handbook of stochastic methods. For physics, chemistry and the natural sciences. — Berlin: Springer-Verlag, 1985. — 442 p.
6. *Шаповалов А.В., Трифонов А.Ю., Масалова Е.А.* Распределение доходностей финансовых активов и нелинейное уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова // Математика. Компьютер. Образование: Сб. научных трудов. Том. 1 / Под ред. Г.Ю.Ризниченко. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". 2007. С. 186–193.
7. *Frank D.* Nonlinear Fokker-Plank equations. Fundamentals and applications. — N.Y., London : Springer-Verlag, 2005. — 407 p.
8. *Shapovalov A.V., Rezaev R.O., and Trifonov A. Yu.* Symmetry operators for the Fokker–Plank–Kolmogorov equation with nonlocal quadratic nonlinearity // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA). 2007. Vol. 7. Paper 005. 16 p.
9. *Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М.* Стохастическая динамика котировок акций РАО ЕЭС // Мат. Мод. 2005. Т.17, N 2. С. 119–125.

SEMICLASSICAL APPROXIMATION FOR THE NONLINEAR FOKKER-PLANCK EQUATION WITH QUADRATIC DIFFUSION IN ASSET RETURN MODELS

Shapovalov A. V., Trifonov A. Yu., Masalova E. A.

A construction of asymptotical solutions in the semiclassical approximation is considered for the nonlinear Fokker-Planck equation with the diffusion coefficient quadratic in space variable, linear drift coefficient and nonlocal nonlinearity in the context of asset return models