ИНФОРМАЦИОННАЯ МАТРИЦА ФИШЕРА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО МЕТОДА DCC-MGARCH(1,1)

Бельснер О. А., Крицкий О. Л.

Найдена аналитическая форма записи информационной матрицы Фишера для эконометрического алгоритма DCC-MGARCH(1,1), использованная затем для его упрощения. При этом выдвигается гипотеза о постоянстве матриц корреляций во времени и проводится статистическая проверка данного предположения. Затем информационная матрица применяется для исследования фондового рынка России

Введение. В настоящее время математическое описание и статистическая обработка данных, получаемых как результат деятельности стохастических систем, проводится на основе одномерных, зачастую хорошо изученных вероятностных законов. Вследствие значительного роста числа этих систем и усложнения их внутренней структуры одномерные распределения уже не могут быть применены адекватно, т.е. они неспособны найти решение с заданной точностью за ограниченное время. Как следствие, огромный интерес представляет задача описания поведения систем в целом без редукции на одномерные подзадачи.

Несмотря на то, что теория информационных матриц развивается уже около 90 лет, начиная с фундаментальных работ Фишера 1922 г., их применение к исследованию свойств многомерных эконометрических алгоритмов существенно ограничено. Первой можно считать работу [1], где вычислена информационная матрица коэффициентов двумерного метода GARCH(1,1), в [2] вычисления проведены для модели MGARCH(1,1), в [3] матрица построена для DCC–MVGARCH(1,1) с эллиптическим вероятностным законом распределения стандартизированных.

В данной работе проводится построение информационной матрицы Фишера для одного из наиболее общих на текущий момент многомерных эконометрических методов – алгоритма DCC-MGARCH(1,1) [4], [5], [6]. Потребность в нахождении такой матрицы обусловлена необходимостью уменьшения числа оцениваемых в DCC-MGARCH(1,1) параметров. При предположении о слабо меняющихся с ходом времени корреляционных матрицах выводится условие постоянства корреляционных матриц во времени, обеспечивающее упрощение эконометрического метода DCC-MGARCH(1,1) до CCC-MGARCH(1,1). Для статистической проверки этого условия выдвигается гипотеза и строится критическая статистика. В заключение, информационная матрица используется при исследовании фондового рынка России.

Общие положения. Предположим, что некоторая совокупность $y_t = \left(y_{1t}, y_{2t}, ..., y_{Kt}\right)^T$ значений факторов риска является стохастическим процессом и описывается многомерным временным рядом логарифмических доходностей $u_t = \left(u_{1t}, u_{2t}, ..., u_{Kt}\right)^T$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathrm{p})$: $u_{it} = ln\left(y_{it}\right) - ln\left(y_{i,t-1}\right)$, $t = 1,...,T$, $i = 1,...,K$, где K – общее число ценных бумаг портфеля.

Предполагая условную гетероскедастичность многомерного временного ряда $\{u_t\}$, $t=1,...,T$, допустим, что его условные математические ожидания равны нулю $E\left(u_{it}\middle|F_{t-1}\right)=0$, $i=1,...,K$, а условные дисперсии в фиксированный момент времени t определяются как $D\left(u_t\middle|F_{t-1}\right)=H_t$, где $H_t=\|h_{ijt}\|$ – симметричная положительно определенная ковариационная матрица $K\times K$, состоящая из дисперсий $h_{iit}=\sigma_{it}^2$, $i=1,...,K$, и ковариаций $h_{ijt}=\sigma_{ijt}$, $1\le i<j\le K$; $\overline{F}=(F_n)_{n\ge 0}$ – фильтрация, определенная σ-подалгебрами F_n такими, что $F_m\subset F_n\subset\overline{F}$, если $m\le n$. Кроме того, предположим, что u_t являются условно–гауссово распределенными многомерными случайными величинами $u_t=H_t^{1/2}\overline{\varepsilon}_t$, где $H_t^{1/2}$ – разложение Холесского для H_t, вектор - столбец $\overline{\varepsilon}_t\sim N(0,I_K)$, I_K – единичная матрица порядка K.

Для описания дисперсий σ_{it}^2, $i=1,...,K$ будем использовать обобщенный процесс авторегрессии условной гетероскедастичности первого порядка GARCH(1,1):

$$\sigma_{it}^2=\omega_i+\alpha_i\sigma_{i,t-1}^2+\beta_i u_{i,t-1}^2, \tag{1}$$

где $\omega_i,\alpha_i,\beta_i$ - скалярные параметры, причем для соблюдения стационарности процесса необходимо выполнение соотношения $\alpha_i+\beta_i<1$. Отметим, что начальные значения $\sigma_{i,0}^2=const$, $u_{i,0}=const$, выбираются постоянными.

Ковариации σ_{ijt}, $1\le i<j\le K$ определим из соотношения:

$$\sigma_{ijt}=\rho_{ijt}\sigma_{it}\sigma_{jt}, \tag{2}$$

где ρ_{ijt} – коэффициенты положительно определенной матрицы корреляций Γ_t, участвующей в разложении $H_t=D_t\,\Gamma_t\,D_t$, D_t – диагональная матрица с элементами σ_{it} на главной диагонали.

Подлежащие детерминации неизвестные параметры в выражениях (1)–(2) объединим в общий вектор $\Theta=(\theta_1,...,\theta_N)$ размерности $N=3K+TK(K-1)/2$:

$\Theta=\left(\omega_1,\alpha_1,\beta_1,...,\omega_K,\alpha_K,\beta_K,\rho_{12t},\rho_{13t},...,\rho_{1Kt},\rho_{23t},...,\rho_{K-1,Kt}\right)$. Оценивание θ_i, $i=\overline{1,N}$ проведем методом максимального правдоподобия.

Модифицируем DCC–MGARCH(1,1) и предположим, что для изменяющихся во времени элементов корреляционной матрицы ρ_{ijt} справедливо следующее соотношение:

$$\rho_{ijt}=\rho_{ij}+\delta_{ij}\varepsilon_{i,t-1}\varepsilon_{j,t-1},\ 1\le i<j\le K,\ 1\le t\le T, \tag{3}$$

где $\varepsilon_{i,t}=u_{i,t}\sigma_{it}^{-1}$ – стандартизированные остатки (шумы), $\varepsilon_t=D_t^{-1}H_t^{1/2}\overline{\varepsilon}_t$, ρ_{ij} – элементы некоторой фиксированной матрицы корреляции $\Gamma=\Gamma_s$ в момент времени t=s.

Равенство (3) предполагает, что матрицы Γ_t, $1\le t\le T$ слабо меняются с течением t и могут быть заменены на сумму постоянной корреляционной матрицы Γ с некоторым белым шумом. Как следствие, размерность вектора Θ существенно снижается и составляет $N=K^2+2K$:

$$\Theta = \left(\omega_1, \alpha_1, \beta_1, ..., \omega_K, \alpha_K, \beta_K, \rho_{12}, \rho_{13}, ..., \rho_{1K}, \rho_{23}, ..., \rho_{K-1,K}, \delta_{12}, \delta_{13}, ..., \delta_{K-1,K}\right).$$

Кроме того, если в (3) $\delta_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le K$, то DCC–MGARCH(1,1) превращается в известный метод CCC–MGARCH(1,1) [7].

Для проверки справедливости равенств $\delta_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le K$, выдвинем статистическую гипотезу $\overline{H}_0 : \delta_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le K$, о постоянстве матриц корреляций в разложении $H_t = D_t \Gamma_t D_t$, имеющую $Q = 0.5\left(K^2 - K\right)$ независимых ограничений. Пусть имеет место альтернативная гипотеза $\overline{H}_1 : \delta_{ij} \ne 0$, $1 \le i < j \le K$.

Построим критическую статистику γ вида:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(l(\Theta) - l(\hat{\Theta})\right) = \overline{Y} \sim N\left(0, \nabla_\Theta l(\Theta) \cdot J_\Theta^{-1}(\Theta) \cdot \nabla_\Theta^T l(\Theta)\right), \tag{4}$$

где $\nabla_\Theta l(\Theta) = \left(\dfrac{\partial l(\Theta)}{\partial \theta_1}, \dfrac{\partial l(\Theta)}{\partial \theta_2}, ..., \dfrac{\partial l(\Theta)}{\partial \theta_N}\right)$, $\hat{\Theta}$ – оценка для вектора Θ, найденная методом максимального правдоподобия. Соотношение (4) выполнено вследствие справедливости леммы Слуцкого о предельном переходе под знаком непрерывной функции $l(\Theta)$. Далее, так как $\nabla_\Theta l(\Theta) \cdot J_\Theta(\Theta) \cdot \nabla_\Theta^T l(\Theta)$ – сумма квадратов нормально распределенных случайных величин, то она имеет χ^2 – распределение с Q степенями свободы. Поэтому γ можно выбрать в виде $\gamma = \hat{S} \cdot J_\Theta^{-1}(\hat{\Theta}) \cdot \hat{S}^T$, где $\hat{S} = \nabla_\Theta l(\hat{\Theta})$.

Гипотеза $\overline{H}_0$ принимается с уровнем доверия $(1-\alpha)$, если $\gamma < \chi^2_{\alpha/2}(Q)$ и отвергается в противном случае.

Матрица $J_\Theta(\Theta)$ является блочной и состоит из подматриц A_s, $s = \overline{1,(K+1)}$, расположенных на ее главной диагонали. Подматрицы A_s определяются как математические ожидания произведений частных производных по всевозможным комбинациям параметров, входящим во множества $\{\omega_1, \alpha_1, \beta_1\}, ..., \{\omega_K, \alpha_K, \beta_K\}$, $\{\rho_{12}, ..., \rho_{K-1,K}, \delta_{12}, ..., \delta_{K-1,K}\}$:

$$A_s = E\left(\partial l / \partial \theta_i^{(s)} \cdot \partial l / \partial \theta_j^{(s)}\right),\ \theta_i^{(s)}, \theta_j^{(s)} \in \{\omega_s, \alpha_s, \beta_s\},\ i,j = \overline{1,3},\ s = \overline{1,K};$$

$$A_{K+1} = E\left(\partial l / \partial \theta_i^{(K+1)} \cdot \partial l / \partial \theta_j^{(K+1)}\right),\ i,j = \overline{1, K(K-1)},$$

где $\theta_i^{(K+1)}, \theta_j^{(K+1)} \in \{\rho_{12}, ..., \rho_{K-1,K}, \delta_{12}, ..., \delta_{K-1,K}\}$.

Матрицы $A_1, ..., A_K$ были вычислены в работе [2]:

$$a_{ij}^{(s)} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{q=1}^{K} \frac{1}{2\sigma_{qt}^4} \frac{\partial \sigma_{qt}^2}{\partial \theta_i^{(s)}} \frac{\partial \sigma_{qt}^2}{\partial \theta_j^{(s)}},$$

где $a_{ij}^{(s)}$ – элементы A_s, $i,j = \overline{1,3}$, $s = \overline{1,K}$.

Определение функционального вида зависимостей для элементов подматрицы A_{K+1} сделано впервые. Приведем здесь лишь конечный результат, отмечая, что при вычислении A_{K+1} были введены вспомогательные матрицы $C_t = \|c_{ij}\| = \Gamma_t^{-1} D_t^{-1}$,

$B_t = \left\| b_{ij} \right\| = H_t^{1/2}$; под знаком K–мерного интеграла, определяющего математическое ожидание, была сделана замена переменного $u = B_t y$, где y – новая некоррелированная случайная величина, и вычислены все возможные моменты четвертого порядка многомерного нормального распределения. Например, были получены следующие равенства:

$$\int\limits_{R^K} u_i^4 f(u) du = 3\sum_{s_1=1}^{K} b_{i,s_1}^4 + 6\sum_{s_1 \neq s_2} b_{i,s_1} b_{i,s_2}\ , \ \int\limits_{R^K} u_i^2 u_j u_q f(u) du = \sum_{s_1=1}^{K}\sum_{s_2=1}^{K} b_{i,s_1}^2 b_{j,s_2} b_{q,s_2}\ , \ i,j = \overline{1,K}$$

где $f(u) = (2\pi)^{-K/2} \, det^{-1/2}(H_t) \, exp\left(-\dfrac{1}{2} u^T H_t^{-1} u \right)$, $u = (u_1, u_2, ..., u_K)^T$.

Заметим так же, что A_{K+1} также является блочной с подматрицами размерности $K(K\text{-}1)/2 \times K(K\text{-}1)/2$:

$$A_{K+1} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{pmatrix},$$

причем блок $M_1 = \left\| m_{\lambda,\eta}^{(1)} \right\|$ построен из математических ожиданий $E(\partial l / \partial\theta_\lambda \cdot \partial l / \partial\theta_\eta)$ по параметрам $\theta_\lambda, \theta_\eta \in \{\rho_{12}, ..., \rho_{K-1,K}\}$, $M_2 = \left\| m_{\lambda,\eta}^{(2)} \right\|$ – из $E(\partial l / \partial\theta_\lambda \cdot \partial l / \partial\theta_\eta)$ по $\theta_\lambda \in \{\rho_{12}, ..., \rho_{K-1,K}\}$, $\theta_\eta \in \{\delta_{12}, ..., \delta_{K-1,K}\}$, $M_3 = \left\| m_{\lambda,\eta}^{(3)} \right\|$ – из $E(\partial l / \partial\theta_\lambda \cdot \partial l / \partial\theta_\eta)$ по $\theta_\lambda, \theta_\eta \in \{\delta_{12}, ..., \delta_{K-1,K}\}$. Тогда

$$m_{\lambda,\eta}^{(1)} = E(\partial l / \partial\rho_{ij} \cdot \partial l / \partial\rho_{ms}) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{p=1}^{4} F_p\ , \ \lambda,\eta = \overline{1, K(K-1)/2},$$

где $F_1 = \sum\limits_{s_1 \neq s_2} c_{is_1} c_{js_1} c_{ms_2} c_{ss_2} \left[3 \cdot \sum\limits_{s_3} b_{s_1 s_3}^2 b_{s_2 s_3}^2 + 3 \cdot \sum\limits_{s_3 \neq s_4} b_{s_1 s_3} b_{s_2 s_3} b_{s_1 s_4} b_{s_2 s_4} + \sum\limits_{s_3 \neq s_4} b_{s_1 s_3}^2 b_{s_2 s_4}^2 \right]$,

$$F_2 = 3 \cdot \sum_{s_1} c_{is_1} c_{js_1} c_{ms_1} c_{ss_1} \left[\sum_{s_2} b_{s_1 s_2}^4 + 2 \cdot \sum_{s_2 \neq s_3} b_{s_1 s_2} b_{s_1 s_3} \right],\ F_3 = 2 \cdot \sum_{s_1}\sum_{s_2 \neq s_3} c_{is_1} c_{js_1} c_{ms_2} c_{ss_3} \left[\sum_{s_4}\sum_{s_5} b_{s_1 s_4}^2 b_{s_2 s_5} b_{s_3 s_5} \right],$$

$$F_4 = \sum_{s_1 \neq s_2}\sum_{s_3 \neq s_4} c_{is_1} c_{js_2} c_{ms_3} c_{ss_4} \left[3 \cdot \sum_{s_5} b_{s_1 s_5} b_{s_2 s_5} b_{s_3 s_5} b_{s_4 s_5} + F_5 \right],$$

$$F_5 = \sum_{s_5 \neq s_6} \left(b_{s_1 s_5} b_{s_2 s_6} + b_{s_1 s_5} b_{s_3 s_6} + b_{s_1 s_5} b_{s_4 s_6} + b_{s_2 s_5} b_{s_3 s_6} + b_{s_2 s_5} b_{s_4 s_6} + b_{s_3 s_5} b_{s_4 s_6} \right).$$

Аналогично,

$$m_{\lambda,\eta}^{(2)} = E(\partial l / \partial\rho_{ij} \cdot \partial l / \partial\delta_{ms}) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{p=1}^{4} F_p \, \varepsilon_{m,t-1} \varepsilon_{s,t-1}\ , \ \lambda,\eta = \overline{1, K(K-1)/2},$$

$$m_{\lambda,\eta}^{(3)} = E(\partial l / \partial\delta_{ij} \cdot \partial l / \partial\delta_{ms}) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{p=1}^{4} F_p \, \varepsilon_{i,t-1} \, \varepsilon_{j,t-1} \, \varepsilon_{m,t-1} \, \varepsilon_{s,t-1}\ , \ \lambda,\eta = \overline{1, K(K-1)/2}.$$

Анализ фондового рынка России. Рассмотрим пять равновесных портфелей по четыре актива в каждом. Первый портфель (П1) составим из обыкновенных акций компаний ЛукОйл, Сургутнефтегаз, Ростелеком, РАО ЕЭС (всего 1701 значение). Второй портфель (П2) сформируем из обыкновенных акций компаний ГМК Норильский Никель, Аэрофлот, АвтоВаз, Моэнерго (всего 1361 значение). Третий портфель (П3) составим из обыкновенных акций компаний Балтика, Роснефть, Росбанк, Полюс Золото (всего 144 значение). Четвертый портфель (П4) составим из обыкновенных акций компаний РАО ЕЭС, Аэрофлот, Сбербанк, Транснефть (всего 1025 значений). Наконец, пятый портфель (П5) составим из обыкновенных акций компаний РИТЭК, МТС, Сибирь-Телеком, Татнефть (всего 730 значений). Отметим, что количество акций K=4 в (П1)–(П5) выбрано для простоты представления результатов, получаемых при вычислениях.

Проведенные расчеты статистик γ для акций портфелей (П1)–(П5) позволили выявить на российском рынке торговые дни трех основных типов (классов). К первому типу ($T1$) относятся дни, для которых выполнена гипотеза о постоянстве матрицы корреляций и применим упрощенный эконометрический метод CCC–MGARCH(1,1). Далее, ко второму типу ($T2$) относятся дни, для которых отклоняется $\overline{H}_0$ и, соответственно, обязательно используется более сложный алгоритм DCC–MGARCH(1,1). Наконец, к третьему типу ($T3$) относятся дни, в которых определитель $\det\left(J_\Theta\left(\hat{\Theta}\right)\right)$ равен нулю, обратная матрица $J_\Theta^{-1}\left(\hat{\Theta}\right)$ не существует, а статистика γ не определена. Моменты времени, входящие в $T3$, наиболее интересны для анализа, так как для них имеет место линейная зависимость строк в блочной матрице A_{K+1} и, как следствие, обнаруживается функциональная связь между корреляциями котировок различных акций в каком-либо портфеле. Значит, некоторые предприятия–эмитенты изначально более тесно связаны друг с другом (даже если они и не принадлежат одной отрасли экономики), а движение их котировок происходит из-за наступления одних и тех же фундаментальных событий, например, из-за движения капитала (притока или оттока) на финансовом рынке или благодаря поступлению новостей и т.п. Кроме того, можно говорить и об использовании инсайдерской информации, так как наблюдаются согласованные покупки и продажи всех активов портфелей (иначе говоря, существуют торговые дни, которые относятся к классу $T3$ для всех П1-П5 одновременно).

Таблица 1. Распределение торговых дней различных типов по портфелям акций

	П1	П2	П3	П4	П5
$T1$	827	614	45	439	219
$T2$	813	611	67	500	454
$T3$	41	116	12	66	57

Количество торговых дней каждого типа $T1$–$T3$, найденное для портфелей П1-П5, приведено в таблице 1.

Доказанная несостоятельность гипотезы о применении алгоритма CCC–MGARCH(1,1) на российском фондовом рынке способствовала дальнейшему эконометрическому анализу поведения портфелей (П1)–(П5) с использованием DCC–MGARCH(1,1). Так как этот анализ выходит за рамки исследований данной работы, позволим себе привести только некоторые конечные результаты: построен вероятный сценарий будущей стоимости портфелей (П1)–(П5) с использованием нормального, α–устойчивого и STS–распределений [8-9], причем для последнего из этих распределений достигнута наибольшая точность вычислений. Например, для портфеля (П1) относительная погрешность между моделируемыми и известными значениями четырех временных рядов не превосходила 4,1%, для (П2) – 4,8%, для (П3) –6,7%, для (П4) – 6,4%.

Заключение. Найдена аналитическая форма записи информационной матрицы Фишера для алгоритма DCC-MGARCH(1,1). Она применена при исследовании фондового рынка России. Проведенные вычисления выявили на российском фондовом рынке торговые дни трех основных типов *T*1–*T*3, причем изменение типизации с *T*1 до *T*2 и с *T*2 до *T*1 происходит через моменты времени *T*3. Кроме того, обнаружен эффект кластеризации многомерной волатильности (матриц ковариаций).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *A.K. Bera, S. Kim*, Testing constancy of correlation and other specifications of the BGARCH model with an application to international equity returns, Journal of Empirical Finance, 2002, 9, pp. 171–195.
2. *I.D. Vrontos, P. Dellaportas, D.N. Politis*, A full-factor multivariate GARCH model, Econometrics Journal, 2003, 6, pp. 312–334.
3. *M. Pelagatti, S. Rondena*, Dynamic Conditional Correlation with Elliptical Distributions, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Dipartimento di Statistica, Working Papers 20060508, 2004.
4. *R.F Engle*, Dynamic conditional correlation – a simple class of multivariate GARCH models, Journal of Business and Economic Statistic, 2002, 20, p. 339 – 350.
5. *A.J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts*, Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.
6. *О.А. Бельснер, О.Л. Крицкий*. Имитационное моделирование значений временных рядов методом динамических условных корреляций на основе несимметричного распределения Лапласа // Известия ТПУ, 2006, т. 309, №5, с. 12–16.
7. *T. Bollerslev,* Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH model, The Review of Economics and Statistics, 1990, V.72, №3, p. 498–505.
8. *Бельснер О.А., Крицкий О.Л.*. Применение одномерного STS-распределения для моделирования значений фондовых индексов// Известия ТПУ, 2007, т. 310, №1, с. 45-50.
9. *S.T. Rachev, C. Menn, F.J. Fabozzi*, Fat–tailed and Skewed Asset Return Distribution. Implications for Risk Management, Portfolio Selection, and Option Pricing, John Wiley & Sons, Hoboken, USA, 2005

FISHER INFORMATION MATRIX FOR MULTIVARIATE DCC-MGARCH(1,1) METHOD

Belsner O. A., Kritski O. L.

The analytic form of Fisher Information Matrix (IM) written for DCC-MGARCH(1,1) was suggested. After that it was applied for simplifying the general algorithm: the statistical hypothesis about constant correlation matrix usage was put forward and statistical verification was made. IM was employed to investigate Russian stock market