О ВИДЕ ВЕКТОРА ОБОБЩЁННОГО ПСЕВДОГРАДИЕНТА В СЛУЧАЕ ВОГНУТОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ ФУНКЦИОНАЛА НЕПРЕРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ

Киселёва Е.М., Дунайчук М.С.

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, ф-т прикладной математики, каф. вычислительной математики и математической кибернетики,
Украина, 49010, г. Днепропетровск, просп. Гагарина 72,
Тел.: +38(056)745-14-11, E-mail: madu@shinet.dp.ua

Непрерывную нелинейную задачу оптимального разбиения множества Ω из E_n на непересекающиеся подмножества $\Omega_1,...,\Omega_N$ с отысканием их центров $\tau_i=(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)})$, $i=\overline{1,N}$, в случае вогнутой нелинейной части целевого функционала при ограничениях в форме равенств и неравенств можно свести к задаче: $\min\limits_{Y\in U}\min\limits_{\tau\in\Omega^N}\max\limits_{\Psi\in\Lambda} G(Y,\tau,\Psi)$, где

$$G(Y,\tau,\Psi)=-\sum_{i=1}^{N}\Psi_i b_i+\sum_{i=1}^{N}[(\varphi_i(Y_i)-\varphi'_{iY_i}(Y_i)\cdot Y_i)]+\int_\Omega \min_{k=\overline{1,N}}(c(x,\tau_k)+\Psi_k+\varphi'_{kY_k}(Y_k))\rho(x)dx, \quad (1)$$

$$U=\{Y\in E_N:\ 0\le Y_i\le b_i,\ i=\overline{1,N}\},\ \Omega^N=\underbrace{\Omega\times...\times\Omega}_{N},\ \Lambda=\{\Psi\in E_N:\ \Psi_i\ge 0,\ i=\overline{p+1,N}\}.$$

$G(Y,\tau,\Psi)$ из (1) выпуклый по Y на выпуклом компакте U. Рассмотрим задачу

$$G(Y,\tau,\Psi)\to\min_{Y\in U},\ \tau\in\Omega^N,\ \Psi\in\Lambda. \quad (2)$$

Пусть Y_* – решение задачи (2). Рассмотрим $\mu\in[0,1]$, $Y_i^{\mu}=Y_{*i}+\mu(Y_i-Y_{*i}),\ i=\overline{1,N}$. Т.к. $Y_i\in[0,b_i],\ Y_{*i}\in[0,b_i],\ [0,b_i]$ – выпуклое множество, то $Y_i^{\mu}\in[0,b_i]$. Тогда функция

$$L(\mu)=G(Y_i^{\mu},\tau_i,\Psi_i)=\sum_{i=1}^{N}\Big[\varphi_i(Y_{*i}+\mu(Y_i-Y_{*i}))-\varphi'_i(Y_{*i}+\mu(Y_i-Y_{*i}))\cdot[Y_{*i}+\mu(Y_i-Y_{*i})]\Big]+$$
$$+\int_\Omega\min_{1\le i\le N}(c(x,\tau_i)+\varphi'_i(Y_{*i}+\mu(Y_i-Y_{*i}))+\Psi_i)\rho(x)dx-\sum_{i=1}^{N}\Psi_i b_i$$

достигает наименьшего значения при $\mu=0$ и имеет место следующее соотношение:

$$L'(0)=\left.\frac{dL(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=0}=\sum_{i=1}^{N}\Big((-\varphi''_i(Y_{*i})[Y_i-Y_{*i}]Y_{*i})+\varphi''_j(Y_{*j})[Y_j-Y_{*j}]\int_\Omega\rho(x)\lambda_j(x)dx,$$

где j: $c(x,\tau_j)+\Psi_j+\varphi'_j(Y_j)=\min\limits_{l=1,...,N}\{c(x,\tau_l)+\Psi_l+\varphi'_l(Y_l)\}$.

Тогда i-я компонента вектора псевдоградиента по Y функционала $G(Y,\tau,\Psi)$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} g_G^{Y_i}(\cdot)=-\varphi''_i(Y_i)Y_i,\ \text{якщо}\ i\ne j,\ \text{де}\ j: c(x,\tau_j)+\varphi_j(Y_j)+\Psi_j=\min\limits_{l=1,...,N}(c(x,\tau_l)+\varphi_l(Y_l)+\Psi_l),\ i=\overline{1,N}, \\ g_G^{Y_j}(\cdot)=-\varphi''_j(Y_j)Y_j+\varphi''_j(Y_j)\int_\Omega\rho(x)\lambda_j(x)dx. \end{cases}$$