

ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ СО СПЕКТРОМ ИЗ ДВУХ ОТРЕЗКОВ РАЗНЫХ ЗНАКОВ

Сорокин П.Н., Ченцова Н.Н.¹

НИИ системных исследований РАН,

Россия, Москва, телефон: (495) 4874803, E-mail: s_p_n_1974@bk.ru

¹МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический ф-т, каф. Вычислительной математики, Россия, Москва, телефон: (499) 1344468, E-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Изучаются итерационные методы решения системы линейных уравнений

$$Ax = b, \quad (1)$$

где A – вещественная квадратная матрица размерности $m \times m$, m – целое, $m \geq 1$, x , b – вектора-столбцы из R^m .

Определение 1. Будем говорить, что матрица A удовлетворяет условию (W) , если все собственные значения $\lambda_k(A)$ матрицы A – вещественные, не кратные и принадлежат множеству $W = [-t, -s] \cup [\mu, M]$, $0 < s < t$, $0 < \mu < M$.

Теорема 1. Решение линейной системы (1), если матрица A удовлетворяет условию (W) , существует и единственно.

Определение 2. Двухпараметрическим методом простой итерации с параметрами α , β называется метод построения последовательности x^n вектор-столбцов из R^m по формуле:

$$x^{n+1} = (E + \alpha A + \beta A^2)x^n - (\alpha E + \beta A)b, \quad (2)$$

где α , β – вещественные числа, отличные от нуля, E – единичная матрица.

Положим $\theta(\alpha, \beta, \lambda) = 1 + \alpha \lambda + \beta \lambda^2$, $q(\alpha, \beta) = \sup_{\lambda \in W} |\theta(\alpha, \beta, \lambda)|$.

Теорема 2. Если матрица A удовлетворяет условию (W) и $q(\alpha, \beta) < 1$, то двухпараметрический метод простой итерации сходится к решению линейной системы (1).

Определение 3. Двухпараметрический метод простой итерации (2) с параметрами α_0, β_0 называется оптимальным, если $q(\alpha_0, \beta_0) = \inf_{\alpha, \beta} q(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \neq 0$ – вещественные числа.

Теорема 3. Если матрица A удовлетворяет условию (W) , то оптимальный двухпараметрический метод простой итерации (2) с $\alpha_0 = (s - \mu)\beta_0$, $q(\alpha_0, \beta_0) = 1 + \beta_0 s \mu < 1$ сходится к решению системы (1). Параметр $\beta_0 = -2/(\mu s + M s - \mu M + M^2)$, если $t - s \leq M - \mu$, иначе $\beta_0 = -2/(\mu s + \mu t - s t + t^2)$.

Литература

1. Сорокин П.Н., Ченцова Н.Н. Оптимальный метод простой итерации со спектром из отрицательного числа и положительного отрезка // “Математика. Компьютер. Образование”. Сборник трудов 15-ой международной конференции. Под ред. Г.Ю. Ризниченко, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008, том 2, стр. 84-87.