О НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВАХ ОСОБЫХ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Дорофеев М.А.

МГУ им. М.В. Ломоносова, механико-математический ф-т, кафедра мат. анализа,
Россия, 119415, Москва, пр-т Вернадского, д. 49, кв. 71,
телефон: (495) 4316739, E-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Пусть R^3_+ – верхнее полупространство, ∂R^3_+ – его граница, а P – топологическое локально компактное хаусдорфово пространство со счетной базой и $f : R^3_+ \to P$ – произвольная функция.

Точку $x \in \partial R^3_+$ назовем точкой пористости множества $E \subset \partial R^3_+$, если существует такое $\theta \in (0,1)$ и такая последовательность $\{r_k\}$, $r_k > 0$, $lim_{k\to\infty} r_k = 0$, что в каждом круге $B(x, r_k)$ с центром в точке x и радиусом r_k, можно выбрать круг радиуса, не меньше величины θr_k, который не содержит точек из E. Множество, состоящее из своих точек пористости, называется пористым множеством. Объединение не более чем счетного числа пористых множеств называется σ-пористым множеством. Обозначим множество всех неизолированных точек пористости множества E через $p(E)$. Множество E называется совершенным σ-пористым, если $E = \bigcup p(F_k)$, где F_k – замкнутое множество.

Пусть $d(a,b)$ – расстояние между двумя точками $a,b \in R^3_+$. Для каждой точки $\zeta \in \partial R^3_+$ рассмотрим следующие множества

$$U(\zeta, c) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3_+, \tilde{x} = (x_1, x_2, 0) \mid d(\zeta, \tilde{x}) \le c\sqrt{1 - (x_3 - 1)^2}\},$$

$$V(\zeta, a, b) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3_+, \tilde{x} = (x_1, x_2, 0) \mid a\sqrt{1 - (x_3 - 1)^2} \le d(\zeta, \tilde{x}) \le b\sqrt{1 - (x_3 - 1)^2}\}$$

Предельным множеством функции $f : R^3_+ \to P$ в точке ζ относительно множества $U \subset R^3_+$ называется множество

$$C(f, \zeta, U) = \{y \in P \mid \exists \{z_k\}_{k=1}^{\infty}, z_k \in U, z_k \to \zeta, k \to \infty, f(z_k) \to y, k \to \infty\}.$$

Множеством особых граничных точек функции $f : R^3_+ \to P$ называется множество

$$E(f) = \bigcup_{a,b,c \in Q} \{\zeta \in \partial R^3_+ \mid C(f, \zeta, U(\zeta, c)) \setminus C(f, \zeta, V(\zeta, a, b)) \ne \emptyset\}.$$

Теорема 1. Для произвольной функции $f : R^3_+ \to P$ множество $E(f)$ является совершенным σ-пористым.

Теорема 2. Пусть E – совершенное σ-пористое множество. Тогда существует неотрицательная, ограниченная и непрерывная в R^3_+ функция $f : R^3_+ \to P$, для которой $E(f)=E$.