

# О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ КЛАССА ЗАДАЧ НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Карачик В.В.

Южно-уральский государственный университет, Россия, 454080, Челябинск, пр.-т  
Ленина 76

Пусть  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$  – единичный шар в  $\mathbb{R}^n$ . Рассмотрим класс краевых задач типа Неймана  $\mathcal{N}_k$

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in S;$$
$$\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k} \Big|_{\partial S} = \varphi_1(s), \quad \frac{\partial^{k+1} u}{\partial \nu^{k+1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_2(s), \dots, \frac{\partial^{k+m-1} u}{\partial \nu^{k+m-1}} \Big|_{\partial S} = \varphi_m(s), \quad s \in \partial S,$$

где  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  – внешняя нормальная производная к единичной сфере, функции  $\varphi_i(s)$  при  $i = 1, \dots, m$  определены на  $\partial S$ . Задача  $\mathcal{N}_0$  является задачей Дирихле, которая безусловно разрешима, а задача  $\mathcal{N}_1$  совпадает с задачей Неймана [1]. Имеются и другие постановки задач типа Неймана [2]. Рассмотрим следующие числа

$$p_i^{(k)} = (-1)^{k-i} \binom{2k-i-1}{i-1} \frac{(2k-2i+1)!!}{2k-2i+1},$$

которые поместим при  $1 \leq i \leq k$  в  $k$ -ю строку целочисленного треугольника Неймана  $\mathbb{P}$  [3], где  $k \in \mathbb{N}$ . Следующее утверждение основано на результатах [4].

**Теорема.** Пусть  $k \leq m$  и  $\varphi_i \in C^{2m-i-1}(\partial S)$ ,  $i = 1, \dots, m$  тогда необходимыми и достаточными условиями разрешимости задачи  $\mathcal{N}_k$  являются  $N_{k,l} = [(k-l+1)/2]$  условий вида

$$\int_{\partial S} H_l(x) \left( p_1^{(m-\lambda)} \varphi_{\delta_\lambda+1}(x) + \dots + p_{m-\lambda}^{(m-\lambda)} \varphi_{m-\sigma_\lambda}(x) \right) ds_x = 0$$

при каждом  $l = 0, 1, \dots, k-1$ , где  $\lambda = [(k-l)/2], \dots, k-l-1$ ,  $\delta_\lambda = 2\lambda - k + l + 1$ ,  $\sigma_\lambda = k - l - \lambda - 1$ ,  $H_l(x)$  – произвольный однородный гармонический полином степени  $l$ . Решение задачи  $\mathcal{N}_k$  существует и единственно с точностью до  $m$ -гармонических полиномов степени  $k-1$ .

## Литература

1. Karachik V.V. On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit ball // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014. Т.8, № 1. P. 63-75.
2. Карачик В.В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Математические труды. 2016. Т. 19, № 2. С. 86-108.
3. Карачик В.В. Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 228-238.
4. Карачик В.В. Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций // Сибирские электронные математические известия. 2017. Т. 14. С. 533-551.