

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ

К.Б. Нургазина

Евразийский национальный университет им.Л.Н.Гумилева,
факультет математики и информационных технологий,
кафедра математического анализа
Казахстан, 0100000, г.Астана, ул.Мунайтпасова, 3
Тел.: +7-701-999-17-69, E-mail.: knurtazina@mail.ru

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \min \\ a(x) &\leq p, a \in P \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $A = \cup \{dom a : a \in P\}$. Положим $f(x) = \sup \{a(x) : a \in P\}$ для всякого $x \in A$. Назовем f верхней огибающей семейства функций P и обозначим $\vee P$.

Предложение 1. Задача (1) эквивалентна следующей задаче:

$$\text{Найти } \inf f = \inf \vee P \tag{1'}$$

Задача (1') называется задачей нахождения минимакса системы P .

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \max \\ b(y) &\geq q, b \in Q \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть $B = \cup \{domb : b \in Q\}$. Положим $s(x) = \inf \{b(y) : b \in Q\}$ для всякого $y \in B$. Назовем s нижней огибающей семейства функций Q и обозначим $\wedge Q$.

Предложение 2. Задача (2) эквивалентна следующей задаче:

$$\text{Найти } \sup s = \sup \wedge Q \tag{2'}$$

Задача (2') называется задачей нахождения максимина системы Q .

Обе задачи (1) и (2) имеют единственное решение.

Два других типа задач принятия решений в условиях неопределенности

$$\begin{aligned} p &\rightarrow \min \\ a(x) &\geq p, a \in P \end{aligned} \tag{3}$$

Предложение 3. Задача (3) эквивалентна следующей:

$$\text{Найти } \inf s = \inf(\sup \wedge Q) \tag{3'}$$

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \max \\ b(y) &\leq q, b \in Q \end{aligned} \tag{4}$$

Предложение 4. Задача (4) эквивалентна задаче (4'):

$$\text{Найти } \max f = \max(\inf \vee P) \tag{4'}$$

Предложение 5. Если \bar{s} есть решение задачи (3), то любое $\bar{\bar{s}} > \bar{s}$ также есть решение задачи (3).

Аналогичное верно и для задачи (4).

Если $P = Q$, то задачи (1') и (2') назовем обобщенно двойственными. Обозначим $P = Q$ в этом случае Σ . Итак, в этом случае обе задачи таковы $\inf \vee \Sigma, \sup \wedge \Sigma$.