

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ФАА ДИ БРУНО

Сорокин П.Н.

Федеральное государственное учреждение Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований РАН (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН),
Нахимовский пр-кт, д. 36, корп. 1, 117218, Москва, Россия, s_p_n_1974@bk.ru

Дифференцирование сложной функции приводит к формуле:

Теорема (Формула Фаа Ди Бруно). Пусть для функций $f(x)$ и $u(x)$ существуют все производные до n -го порядка. Тогда для n -ой производной сложной функции $g(x) = f(u(x))$ имеет место следующая формула:

$$g^{(n)}(x) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots=n} f^{(k_1+k_2+k_3+\dots)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+k_3+\dots}, \quad (1)$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+\dots} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\dots} \cdot \left(\frac{u'}{1!}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{u''}{2!}\right)^{k_2} \cdot \left(\frac{u'''}{3!}\right)^{k_3} \dots,$$

где суммирование в правой части формулы (1) ведется по всем целым неотрицательным числам k_1, k_2, k_3, \dots таким, что $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots = n$.

Мы обобщим эту формулу на случай сложной функции $f(u, v)$ от двух функций $u(x), v(x)$ по независимой переменной x :

$$g^{(n)}(x) = \left(\sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots+nk_n=n} \frac{n! \cdot A_1^{k_1} \cdot A_2^{k_2} \cdot A_3^{k_3} \dots A_n^{k_n}}{k_1!k_2!k_3!\dots k_n!} \right) f(u, v),$$

где

$$A_j = \frac{u_j}{j!} \cdot \frac{\partial}{\partial u} + \frac{v_j}{j!} \cdot \frac{\partial}{\partial v}$$

$$u_j = \frac{d^j u(x)}{dx^j}, v_j = \frac{d^j v(x)}{dx^j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Число различных мономов от n переменных A_1, A_2, \dots, A_n определяется уравнением

$$k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n, \quad k_j \geq 0.$$

Работа выполнена по теме государственного задания НИР 0065-2019-0007.

Литература

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. 3-ое издание, переработанное и дополненное – М.: Дрофа, 2003 – 640 с.