НЕКОММУТАТИВНОСТЬ И ГЛОБАЛЬНОСТЬ — ПРИЧИНЫ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Яковенко Г.Н.

Московский физико-технический институт, Россия,
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9,
кафедра теоретической механики.
Тел.: (495)576-57-33, факс: (495)408-68-69. E-mail: Yakovenko_G@mtu-net.ru

Динамический процесс моделируется обыкновенными дифференциальными уравнениями. Процесс считаем линейным, если существует выбор переменных, при которых дифференциальные уравнения линейны. В противном случае — процесс считаем нелинейным. Известно [1], что, если у неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = \varphi(t,x)$, $x \in R^n$, в некоторой области существует общее решение $x = f(t,t_0,x_0)$, то неавтономной заменой переменных $y = f(t_0,t,x)$ система упрощается до $\dot{y} = 0$. Известно [1], что, если у автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, в некоторой области существуют функционально независимые первые интегралы $w_1(x) - t = c_1$, $w_2(x) = c_2$, $\cdots$, $w_n(x) = c_n$, то автономной заменой переменных $y = w(x)$ система приводится к виду $\dot{y}_1 = 1$, $\dot{y}_2 = 0, \cdots$, $\dot{y}_n = 0$ (выпрямление векторного поля $\varphi(x)$).

Пусть динамический процесс моделируется сепарабельной системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = u_1(t)\varphi_1(x) + \cdots + u_m(t)\varphi_m(x)$, $x \in R^n$. Спрашивается, можно ли автономной заменой переменных $x \leftrightarrow y$ упростить каждое векторное поле $\varphi_k(x)$ Сформулируем результат [2] с использованием операторов $X_k = \varphi_k(x)\partial_x$ и коммутаторов $[X_i, X_k]h(x) = X_i X_k h(x) - X_k X_i h(x)$.

Сепарабельную систему при $m \le n$ автономной заменой переменных $y = g(x)$ можно привести к виду $\dot{y}_i = u_i$, $i = \overline{1,m}$, $\dot{y}_i = 0$, $i = \overline{m+1,n}$ (все векторные поля выпрямлены) в том и только в том случае, если выполняется $[X_i, X_k] = 0$, $i,k = \overline{1,m}$ (операторы X_k коммутируют).

Работа поддержана РФФИ (проект 07-01-00217).

Литература

1. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 384 с.
2. *Яковенко Г.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы с управлением — сравнительный групповой анализ // Электронный журнал «Дифференциальные уравнения и процессы управления». — 3, 2002. — С. 40--83. (http://www.neva.ru/journal)