ПОЛИПОЛЯРНАЯ ПЛОСКОСТЬ:
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ФУНКЦИИ, ОТОБРАЖЕНИЯ

Ракчеева Т.А.

Институт машиноведения РАН, Москва, Россия
E-mail: *rta_ra@list.ru*

Точки плоскости, имеющие в общем случае две степени свободы, координируются по-разному в разных системах координат (СК). Несмотря на универсальность и простоту декартовой СК, разработано много других прямолинейных и криволинейных систем, применение которых может оказаться более удобным для решения той или иной конкретной задачи. Наиболее простая из криволинейных СК - полярная – характеризует, как известно, точку относительно единого центра также двумя координатами: полярным радиусом ρ и полярным углом φ.

Данная работа посвящена новой - полиполярной системе координат, которая так же, как и традиционная полярная СК, характеризует точку плоскости двумя координатами: полярным радиусом ρ и полярным углом φ, но имеет не один центр-полюс, а несколько (конечное число) полюсов. Такое координирование обеспечивается семействами *многофокусных лемнискат* (*овалов Кассини*).

Лемниската определяется через k точек-фокусов на плоскости и числовой параметр R как геометрическое место точек, для которого сохраняется постоянным, равным R, произведение расстояний до всех k фокусов. Многофокусные лемнискаты, представляющие собой гладкие замкнутые кривые без пересечений и самопересечений и содержащие внутри себя все k фокусов, позволяют построить обобщение классического полярного представления в виде полиполярной плоскости. Подобно семейству концентрических окружностей однополярной СК, семейство изофокусных лемнискат может координировать расстояние до системы фокусов, а само расстояние может служить метрической (радиальной) координатой ρ полиполярной лемнискатической системы координат. Семейство лемнискат и семейство градиентных кривых образуют два взаимно ортогональные семейства координатных кривых.

Мультипликативный инвариант лемнискаты на комплексной плоскости определяется как: $|z - z_1|\,|z - z_2| \ldots |z - z_k| = R^k$, где z – произвольная точка лемнискаты, а z_i – координаты фокусов. Свойства лемнискатического инварианта позволяют определить комплексное число относительно системы конечного числа полюсов, функции такого комплексного переменного, а также традиционные алгебраические операции с числами и функциями. Исследован ряд других операций с функциями, таких, например, как конформные отображения, задаваемые линейной функцией, дробно-рациональной, инверсной и др.

Метрическая структура полиполярной лемнискатической системы координат такова, что в ней возможны разные локальные метрики, связанные с отдельными фокусами, например, один фокус является локальным центром с обычным евклидовым расстоянием, а другой – с расстоянием в гиперболической (псевдоевклидовой) метрике. Геометрия всей плоскости представляет собой сочетание локальных геометрий.