ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ТИПА ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Сидоренко О.Г.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Россия,
Башкортостан, 453100, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49
Тел.: (3473)25-45-96,
E-mail: Olsig@rambler.ru

Рассмотрим уравнение смешанного типа $Lu \equiv K(t)u_{xx} + u_{tt} - b^2 K(t)u = 0$, где $K(t) = \operatorname{sgn} t \cdot |t|^m$, $m = const > 0$, $b = const > 0$, в области $D = \{(x,t) \ | 0 < x < 1,$ $-\alpha < t < \beta\}$, α, β - заданные положительные числа, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \{x = 0\} \cup \{x = 1\}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{1}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \ (x,t) \in D_+ \cup D_-, \tag{2}$$

$$u(0,t) = u(1,t), \ \ u_x(0,t) = u_x(1,t), \ -\alpha \le t \le \beta, \tag{3}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \ 0 \le x \le 1, \ u_t(x,-\alpha) = \psi(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{4}$$

где φ и ϕ - заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$.

Теорема 1. *Если существует решение* $u(x,t)$ *задачи* (1) – (4), *то оно единственно только тогда, когда*

$$\triangle_k(\alpha,\beta) = \frac{\pi}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2q}\right)}\left[J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q) + J_{-\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q)\right] I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) + J_{\frac{1}{2q}-1}(p_k\alpha^q) K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q) \ne 0, \tag{5}$$

где $J_{\frac{1}{2q}-1}(z)$, $J_{-\frac{1}{2q}-1}(z)$, $I_{\frac{1}{2q}}(z)$, $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ *- функции Бесселя,* $q = (m+2)/2$.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ *и на сегменте* $[0,1]$ *имеет кусочно-непрерывную производную третьего порядка,* $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$; $\psi(x) \in C^{2+\delta}[0,1]$, $\delta > \dfrac{1}{2} + \lambda$, $\lambda = 1/2 - 1/2q$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$. *Тогда задача* (1) – (4) *однозначно разрешима тогда, когда выполнены условия* (5) *и* $\inf\limits_k |\sqrt{k}\triangle_k(\alpha,\beta)| \ge C_0 > 0$, *и это решение определяется в виде суммы ряда* $u(x,t) = u_0(t) + \sqrt{2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\cos(2\pi kx) + \sqrt{2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \upsilon_k(t)\sin(2\pi kx)$, *где* $u_0(t)$, $u_k(t)$, $\upsilon_k(t)$ *определены в явном виде.*

Следствие. Построенное решение $u(x,t)$ задачи (1) – (4) принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и функция $u(x,t)$ всюду в D является решением рассматриваемого уравнения. Следовательно, линия изменения типа $t = 0$ как особая линия устраняется.