ПОДМНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В ОБОБЩЁННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ ВТОРОГО РОДА

Малаховский В.С.

Калининград, Российский государственный университет им. И. Канта

Введено понятие обобщённой арифметической прогрессии второго рода и рассмотрены определяемые ею подмножества простых чисел.

Определение 1. Обобщённой арифметической прогрессией второго рода с первым членом a_1 и разностью d называется последовательность действительных чисел, определяемых рекуррентной формулой $a_{n+1} = a_n + (2n-1)d$, (1)

где $n \in N$. Из (1) непосредственно вытекают формулы для $n^{-го}$ члена a_n и суммы S_n n первых членов обобщённой арифметической прогрессии $2^{\text{-го}}$ рода:

$$a_n = a_1 + (n-1)^2 d, \qquad (2)$$

$$S_n = n\left(a_1 + \frac{1}{6} d\,(n-1)(2n-1)\right). \qquad (3)$$

Пусть $p-$нечётное простое число, а $d-$ чётное число. Рассмотрим последовательность $a_n = p + (n-1)^2 d \quad (p \in P, n \in N, d - \textit{чётное})$. (4)

Для $d = 2, p = 5$ и $p = 29$ формула (4) определяет последовательность именно p простых чисел:

$\{5,7,13,23,37\}$; $\{29,31,37,47,61,79,101,127,157,191,229,271,317,367,421,479,541,607,677,$ $751,829,911,997,1087,1181,1279,1381,1487,1597\}$

Этот и другие представленные в докладе примеры показывают удивительные свойства некоторых подмножеств простых чисел, когда по заданному простому числу p и определённому чётному числу d возникает последовательность, образованная именно p простыми числами. Однако, как и в случае с общей обобщённой арифметической прогрессией (обобщённой прогрессией первого рода) $a_{n+1} = a_n + nd$ $(n \in N, a_1 \in P \wedge a_1 \neq 2, d - \textit{чётное})$ (см. [1],[2]), представляет интерес выделение подмножеств простых чисел с помощью обобщённой арифметической прогрессии второго рода с числом элементов, меньшим, чем $p = a_1$. Например, $a_n = 11 + 8(n-1)^2 \leftrightarrow \{11,19,43,83,139,211\}$; $a_n = 73 + 10(n-1)^2 \leftrightarrow \{73,83,113,163,233\}$;

Множество P простых чисел хранит ещё много неожиданных свойств. Рассмотрим, например, первую четвёрку простых чисел $\{2,3,5,7\}$. Она определяет подмножества простых чисел с удивительными закономерностями, одной из которых является:

1) $3 \cdot 5 + 2^{2k-1}, \quad 3 \cdot 7 + 2^{2k-1}, \quad 5 \cdot 7 + 2^{2k-1} \ (k = 1,2,3)$;

Литература.

1. Малаховский В.С. Об одной рекуррентной формуле, определяющей подмножества простых чисел.//Дифференц. геом. многообразий фигур. Калининград, 2004. №35.С.79-84.
2. V.S. Malakhovsky, N.V. Malakhovsky. Prime numbers in the generalized arithmetical progressions. Избранные вопросы современной математики. Изд-во Калининградского ун-та, Калининград, 2005.-С.33-35.