ВЕРОЯТНОСТЬ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Заляпин В.И.

ЮУрГУ, Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина 76, 8(351)2679904, zaliapinvi@susu.ru

Введение. В докладе предлагается метод исследования специальных функций математической физики, основанный на их вероятностной интерпретации.

Основная конструкция. Рассмотрим случайное блуждание по целочисленной сети $\mathbb{Z}^m$ в $\mathbb{R}^m$, такое, что $\forall x, y \in \mathbb{Z}^m \quad P\{x,y\} = P\{0, y-x\} = \begin{cases} p_i, y-x = e_i \\ 0, y-x \neq e_i \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$

Здесь $\{e_i, i = 1,2,...,m\}$ ---- линейно независимые в $\mathbb{R}^m$ элементы, $p_i > 0.$ Если n,k – целые положительные числа, такие, что n+k=m, $A = \|a_{ij}\|_{k\times(n+k)}$ – целочисленная матрица, то, полагая $x = y(\mathrm{mod}\, A) \Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{Z}^k : x - y = l \times A$, рассмотрим Ω_n^k - совокупность классов эквивалентности по введенному сравнению:

$$\Omega_n^k(A) = \{H_x^A, x \in \mathbb{Z}^m\}, H_x^A = \{y \in \mathbb{Z}^m : y = x(\mathrm{mod}\, A)\} .$$

Если теперь рандомизовать случайное блуждание пуассоновским процессом с интенсивностью λ, то легко установить, что вероятность за время t попасть в один из классов совокупности Ω_n^k будет даваться соотношением:

$$P\{H_x^A\} = \exp(-\lambda \times t) \times G_x(tp\lambda) .$$

Полагая в последнем соотношении $tp\lambda = z$, введем в рассмотрение функции $G_x(z)$, где индекс x - любой представитель класса H_x^A. Функции $G_x(z)$ являются искомым обобщением классических специальных функций и носят название *функций пуассоновского блуждания.*

Примеры.

1. $n = 1, k = 1, A = \|1,1\|$ – модифицированные функции Бесселя;
2. $n = 1, k = 1, A = \|1,-2\|$ – многочлены Эрмита;
3. $n = 2, k = 1, A = \|1,1,-1\|$ – многочлены Лагерра;
4. $n = 3, k = 1, A = \|1,1,-1,-1\|$ – гипергеометрия, в т.ч. многочлены Якоби, Лагранжа, 4-мерные сферические функции.

Используя хорошо изученные стохастические конструкции, удается по новому взглянуть на сложные соотношения и формулы теории специальных функций, расшифровать известные соотношения и асимптотики, изучить их свойства.