ОПТИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ СО СПЕКТРОМ ИЗ ДВУХ ОТРЕЗКОВ РАЗНЫХ ЗНАКОВ

Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н.

Рассматривается оптимальный метод простой итерации для порождающего оператора с собственными значениями разных знаков. Отрицательные и положительные собственные значения принадлежат отрезкам произвольной длины на отрицательной и положительной полуоси, соответственно. Оптимальный метод по норме C ищется в классе двухпараметрического семейства метода простой итерации.

Изучаются итерационные методы решения системы линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{1}$$

где A — действительная квадратная матрица размерности $m \times m$, m — целое, $m \geq 1$, x, b — вектора-столбцы из пространства R^m.

Определение 1. Будем говорить, что матрица A удовлетворяет условию (W), если все собственные значения $\lambda_k(A)$ матрицы A — действительные, некратные и принадлежат множеству $W = [-t, -s] \bigcup [\mu, M]$, $0 < s < t$, $0 < \mu < M$.

Теорема 1. Пусть действительная квадратная матрица A размера $m \times m$ удовлетворяет условию (W), тогда она невырождена, т.е. определитель $\det A$ матрицы A отличен от нуля.

Теорема 2. Решение линейной системы (1), если матрица A удовлетворяет условию (W), существует и единственно.

Определение 2. Двухпараметрическим методом простой итерации с параметрами α, β называется метод построения последовательности x^n вектор-столбцов из пространства R^m по формуле:

$$x^{n+1} = Bx^n - Cb, \ n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

где $B = E + \alpha A + \beta A^2$, $C = \alpha E + \beta A$, а также α, β — действительные числа, β отлично от нуля, E — единичная матрица.

Положим $\theta(\alpha,\beta,\lambda)=1+\alpha\lambda+\beta\lambda^2$, $q(\alpha,\beta)=\sup\limits_{\lambda\in W}|\theta(\alpha,\beta,\lambda)|$.

Теорема 3. Пусть матрица A удовлетворяет условию (W). Тогда все собственные значения $\lambda_k(B)$ матрицы B имеют следующий вид: $\lambda_k(B)=\theta(\alpha,\beta,\lambda_k(A)), m\geq k\geq 1$.

Теорема 4. Пусть $q(\alpha,\beta)<1$ и матрица A удовлетворяет условию (W). Тогда итерационный процесс (2) сходится.

Теорема 5. Пусть последовательность (2) сходится к пределу x^*. Если β не равно нулю и $\lambda(A)$ не равно $-\alpha/\beta$, то вектор-столбец x^* из пространства R^m является решением линейной системы (1).

Теорема 6. Пусть матрица A удовлетворяет условию (W) и $q(\alpha,\beta)<1$. Тогда $\lambda(A)$ не равно $-\alpha/\beta$.

Теорема 7. Пусть матрица A удовлетворяет условию (W) и $q(\alpha,\beta)<1$. Тогда двухпараметрический метод простой итерации сходится к решению системы (1).

Определение 3. Двухпараметрический метод простой итерации (2) с параметрами α_0,β_0 называется оптимальным, если $q(\alpha_0,\beta_0)=\inf\limits_{\alpha,\beta}q(\alpha,\beta)$, где α,β — вещественные числа, $\beta\neq 0$.

Пусть

$$\beta_0=-2/(\mu s+Ms-\mu M+M^2),\text{ если } t-s\leq M-\mu,$$
$$\beta_0=-2/(\mu s+\mu t-st+t^2),\text{ если } t-s>M-\mu, \tag{3}$$
$$\alpha_0=(s-\mu)\beta_0,\ q_0=q(\alpha_0,\beta_0)=1+\beta_0 s\mu.$$

Теорема 8. Если матрица A удовлетворяет условию (W), то $|\theta(\alpha_0,\beta_0,\lambda)|$ достигает своего максимального значения на множестве W в трех точках границы W. При $t-s\leq M-\mu$ в точках $-s,\mu,M$, а при $t-s>M-\mu$ в точках $-t,-s,\mu$.

Теоремы 1 – 8 доказываются также как и в предыдущей работе авторов (Сорокин, Ченцова, 2008).

Теорема 9. Если матрица A удовлетворяет условию (W), то оптимальным двухпараметрическим методом простой итерации является метод с параметрами $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, определенными в (3), сходящийся к решению системы (1) со скоростью q_0, $0 < q_0 < 1$ по норме $C(W)$.

Доказательство. Случай, когда собственные значения λ матрицы A принадлежат множеству $\{-s\}\bigcup[\mu, M],\ 0 < s,\ 0 < \mu < M$, рассмотрен в работе авторов (Сорокин и Ченцова, 2008).

Пусть $t - s \le M - \mu$. Значения α_0, β_0 вычисляются по теореме 8 из соотношений

$$q_0 = \theta(\alpha_0, \beta_0, -s) = \theta(\alpha_0, \beta_0, \mu) = -\theta(\alpha_0, \beta_0, M).$$

Неравенство

$$|\,\theta(\alpha_0, \beta_0, \lambda)\,| < q_0 \tag{4}$$

выполнено при $\mu < \lambda < M$. Проверим, что (4) выполнено при $-t < \lambda < -s$.

Используем условия $|\,\theta(\alpha_0, \beta_0, \lambda)\,| < 1 + s\mu\beta_0$ и $\alpha_0 = (s - \mu)\beta_0$. Тогда

$$|\,1 + \beta_0\lambda(s - \mu + \lambda)\,| < 1 + s\mu\beta_0,$$

что соответствует

$$-1 - s\mu\beta_0 < 1 + \beta_0\lambda(s - \mu + \lambda) < 1 + s\mu\beta_0.$$

Рассмотрим неравенство

$$-1 - s\mu\beta_0 < 1 + \beta_0\lambda(s - \mu + \lambda).$$

При подстановке $\beta_0 = -2\big/(\mu s + Ms - \mu M + M^2)$ оно эквивалентно

$$\lambda^2 + (s - \mu)\lambda + (\mu M - Ms + M^2) < 0.$$

Решением этого неравенства является интервал $\mu - s - M < \lambda < M$.
Значит, должно выполняться неравенство $-t > \mu - s - M$. Отсюда,
$M - \mu > t - s$, что удовлетворяет условию теоремы для этого случая.

Второе неравенство

$$1 + \beta_0\lambda(s - \mu + \lambda) < 1 + s\mu\beta_0$$

эквивалентно неравенству

$$\lambda^2 + (s - \mu)\lambda - s\mu > 0.$$

Решением этого неравенства являются интервалы $\lambda < -s$ и $\lambda > \mu$. Это удовлетворяет условиям теоремы.

Непосредственной проверкой установлено, что $0 < q_0 < 1$. Из работы авторов (Сорокин, Ченцова, 2008) непосредственно следует оптимальность (4).

Случай $t - s > M - \mu$ сводится к уже доказанному случаю для оператора $A_1 = -A$.

Теорема 9 доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 09-01-00625).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Сорокин П. Н., Ченцова Н. Н. Оптимальный метод простой итерации со спектром из отрицательного числа и положительного отрезка // Математика. Компьютер. Образование. Сборник трудов 15-ой международной конференции. Под ред. Г.Ю. Ризниченко, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — 2008. — Т. 2. — С. 84–87.

OPTIMUM METHOD OF SIMPLE ITERATION GENERATED BY OPERATOR WITH EIGEN VALUES BELONGING TO SEGMENTS OF DIFFERENT SIGNS

Sorokin P. N., Chentsova N. N.

Optimum method of simple iteration for generating operator with eigen values of different sings is discussed. Negative and positive values belong to segments of different length on negative and positive half-axes. Optimum method in norm C is searched out in the class of two-parametric family of methods of simple iteration.