

## ВЛИЯНИЕ СТАРЕНИЯ УЗЛОВ В ЛОКАЛЬНО-МИРОВЫХ СЕТЯХ С КОНКУРЕНЦИЕЙ

Гаджиев Б. Р., Прогулова Т. Б., Щетинина Д. П.

*Мы представляем модель локально-мировой сети с конкуренцией и старением, которая является обобщением локально-мировой модели растущей сети. Мы генерируем такие сети при различных распределениях фитнес-параметров, а именно при равномерном и степенном, и показываем, что изменение функции распределения фитнес-параметра существенно изменяет топологию сетей. Мы изучаем влияние эффекта старения узлов на топологию сети и показываем, что с ростом показателя старения характер корреляции сети меняется от assortативного к некоррелированному. В работе представлены результаты анализа устойчивости рассмотренных сетей к случайным отказам и направленным атакам.*

**Введение.** В основе модели растущих сетей Барабаси и Альберт (БА) лежат два механизма: рост сети и линейное предпочтительное присоединение (Albert and Barabási, 2002). Модель БА приводит к сети, распределение степеней которой подчиняется степенному закону  $p(k) \sim k^{-\gamma}$ , со строго фиксированным показателем  $\gamma=3$ . Однако анализ сетей реального мира показал, что  $1 \leq \gamma \leq 3$  (Albert and Barabási, 2002; Dorogovtsev and Mendes, 2002; Vocolletti et al., 2006). Это связано с тем, что процесс роста сетей реального мира включает дополнительные механизмы, которые могут затрагивать как собственно процесс роста (добавление связей между существующими узлами, пересвязывание ребер, слияние узлов и т.д.), так и принцип предпочтительного присоединения (нелинейное предпочтительное присоединение, ускоренный рост и т.д.) (Albert and Barabási, 2002; Dorogovtsev and Mendes, 2002; Vocolletti et al., 2006). Дальнейшее изучение сетей реального мира показало, что может нарушаться и принцип глобального действия предпочтительного присоединения, т.е. в самом деле, механизм предпочтительного присоединения действует в сети не глобально, а локально. Эта идея лежит в основе локально-мировой модели растущих сетей (Li and Chen, 2003). Од-

нако, не менее важными механизмами роста сетей реального мира являются конкуренция и старение узлов. В случае, когда принцип предпочтительного присоединения работает в сети глобально, влияние конкуренции и старения узлов на топологию растущей сети исследовалось в (Bianconi and Barabási, 2001) и (Dorogovtsev and Mendes, 2000), соответственно.

В данной работе мы представляем результаты исследования локально-мировых сетей с конкуренцией и старением узлов. Анализируется устойчивость этих сетей к случайным отказам и направленным атакам.

Статья построена следующим образом: приводится сжатое описание локально-мировой модели, фитнес-модели и модели сети со старением, описан алгоритм генерации локально-мировых сетей с конкуренцией и старением узлов, приводятся результаты изучения топологии этих сетей и результаты исследования устойчивости к случайным отказам и направленным атакам.

**Генерация локально-мировых сетей с конкуренцией и старением.** Локально-мировая (ЛМ) модель, предложенная в (Li and Chen, 2003) основана на модели Барабаси–Альберт (Albert and Barabási, 2002). Она отличается от БА модели новым механизмом предпочтительного присоединения — механизмом *локального* предпочтительного присоединения. Новая вершина может связаться с уже присутствующими в сети узлами только в пределах локального мира этой новой вершины.

Механизмы, заложенные в модель БА, приводят к тому, что степень всех узлов растет со временем как  $\sim t^{1/2}$ . Как следствие, более старые узлы имеют большую степень, поскольку их большее время жизни позволило «накопить» ребра. В реальных сетях нередко «предпочтительность присоединения» бывает связана не только с количеством имеющихся связей, но и с дополнительными факторами, например, в социальных сетях с уровнем интеллекта, внешней привлекательностью и т.п. Чтобы учесть эти дополнительные факторы «притягательности» вершин в (Bianconi and Barabási, 2001) предложена так называемая фитнес-модель. Здесь, также как и в обыкновенной БА модели, на каждом шаге к сети добавляется новая вершина, однако при рождении ей приписывается значение фитнес-параметра  $\eta$ , распределенное в соответствии с некоторым законом  $\rho(\eta)$ . Вероятность  $\Pi$  того, что новая вершина

окажется связанной с вершиной  $i$  зависит теперь как от ее степени  $k_i$ , так и от значения фитнес-параметра  $\eta_i$  :

$$P = k_i \eta_i / \sum_j k_j \eta_j,$$

где суммирование производится по всем вершинам сети.

Структурное старение сети обсуждается в работе (Dorogovtsev and Mendes, 2000). Генерация сети со старением осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом: в момент времени  $t = 0$  в сети имеется одна вершина, и в каждый дискретный момент времени  $t = 1, 2, \dots$  в сеть добавляется одна вершина с одной связью. Для каждой вершины фиксируется её возраст  $\tau = t - s$ , где  $s$  — номер вершины, приписываемый ей в момент ее появления. Функция старения определяется как  $\tau^{-\alpha}$ . Новый узел соединяется с уже существующими в соответствии с обобщенным принципом предпочтительного присоединения, согласно которому вероятность присоединения к узлу  $i$  зависит как от степени  $k_i$ , так и от возраста  $i$ -го узла:

$$P(k_i) = \frac{k_i (t - i)^{-\alpha}}{\sum_{j=0}^t k_j (t - j)^{-\alpha}}$$

Генерация локально-мировой сети с конкуренцией и старением узлов производится в соответствии со следующим итерационным алгоритмом:

1. *Рост.* Генерация сети начинается с  $m_0$  изолированных вершин, в каждый момент времени  $t$  к сети добавляется новая вершина, которая должна быть связана с уже существующими вершинами  $m$  ( $m = m_0$ ) ребрами. Как начальным  $m_0$  вершинам, так и каждой из добавляемых вершин в соответствии с распределением  $\rho(\eta)$  приписывается значение фитнес-параметра  $\eta$ .

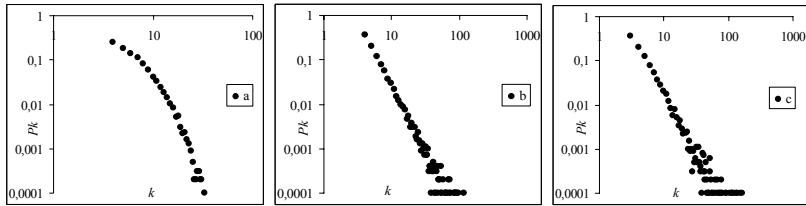
2. *Локальное предпочтительное присоединение с учетом конкуренции и старения узлов.* В каждый момент времени  $t$ , перед тем, как соединить новую вершину с уже существующими, случайным образом выбирается  $M$  вершин, тем самым формируется «локальный мир». Ребра добавляются между новой вершиной и  $m$  вершинами локального мира. Вероятность связывания некоторого узла  $i$  локального мира с новым узлом равна:

$$P_{local}(i) = \frac{M}{m_0 + t} \frac{k_i \eta_i (t - i)^{-\alpha}}{\sum_{j \in local} k_j \eta_j (t - j)^{-\alpha}}.$$

Очевидно, что при  $M = m$  механизм предпочтительного присоединения с учетом фитнес-параметра и старения «не работает», новая вершина будет связана с каждой из вершин локального мира. Напротив, при больших  $M$  никак не проявляется эффект локального мира.

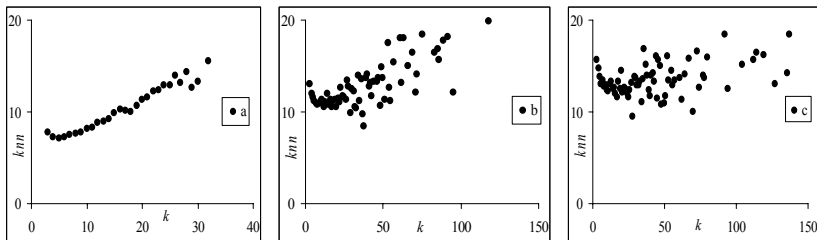
**Анализ топологии и корреляций локально-мировых сетей с конкуренцией и старением.** В соответствии с вышеописанными алгоритмами мы генерировали локально-мировые сети с конкуренцией и старением для различных значений размера локального мира  $M$ , случайного и степенного распределений фитнес-параметра и различных значений показателя старения  $\alpha$ . Мы строили распределения степеней. Для определения наличия и характера корреляций в сети вычислялись зависимости средней степени ближайших соседей вершины от ее степени  $\bar{K}_{nn}(k)$ . Как отмечено в (Caldarelli G., 2007), зависимость  $\bar{K}_{nn}(k)$  может проявлять различное поведение. Если  $\bar{K}_{nn}(k)$  с ростом  $k$  возрастает, т.е., оказывается, что вершины большей степени предпочтительно соединены с вершинами большей степени, то корреляции степеней вершин в сети носят ассортативный характер (ассортативное смешивание). Если с ростом  $k$  значения  $\bar{K}_{nn}(k)$  уменьшаются, т.е. вершины большей степени преимущественно соединены с вершинами малых степеней, характер корреляций дисассортативный (дисассортативное смешивание). Если средняя степень ближайших соседей  $\bar{K}_{nn}$  не зависит от степени  $k$ , сеть некоррелирована.

На рис. 1 приведены распределения степеней вершин для сетей, сгенерированных при следующих параметрах модели:  $m = m_0 = 3$ , число добавляемых вершин  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ . Распределение значений фитнес-параметра  $\rho(\eta) = 1$ , значение показателя старения  $\alpha = 0$ , что соответствует локально-мировой модели без старения и конкуренции.

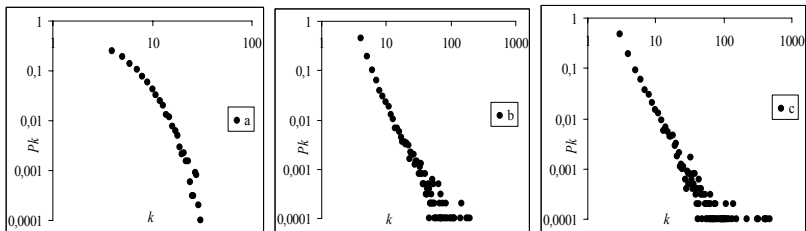


**Рис. 1.** Распределения степеней для ЛМ сети:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .

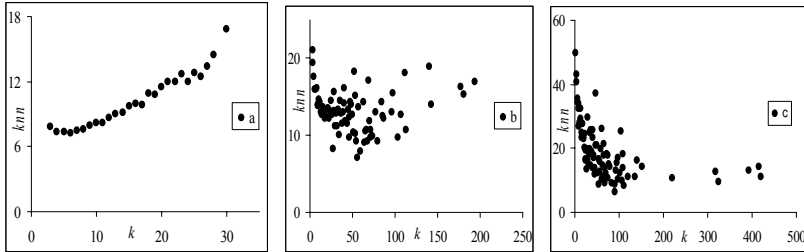
Показанные на рис. 2 зависимости  $\bar{K}_{nn}(k)$  для вышеуказанных трех сетей показывают, что ЛМ сети имеют ассортативный характер, однако при увеличении размера локального мира степень корреляции уменьшается, при больших значениях  $M$  сеть становится некоррелированной.



**Рис. 2.** Зависимость  $\bar{K}_{nn}(k)$  для ЛМ сети:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .



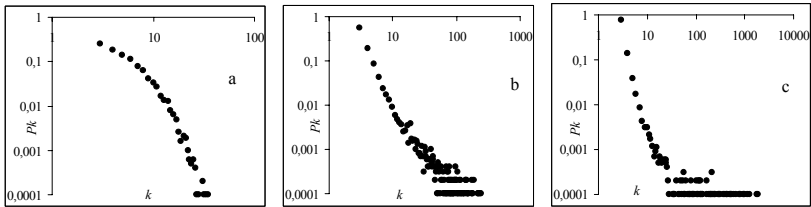
**Рис. 3.** Распределения степеней для ЛМК сети с однородным распределением значений фитнес-параметра:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .



**Рис. 4.** Зависимость  $\bar{K}_{nn}(k)$  для ЛМК сети с однородным распределением значений фитнес-параметра:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .

На рис. 3–4 приведены распределения степеней вершин и зависимость  $\bar{K}_{nn}(k)$  для локально–мировых сетей с конкуренцией (ЛМК) для случая однородного распределения фитнес-параметра, сгенерированных при следующих параметрах модели:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .

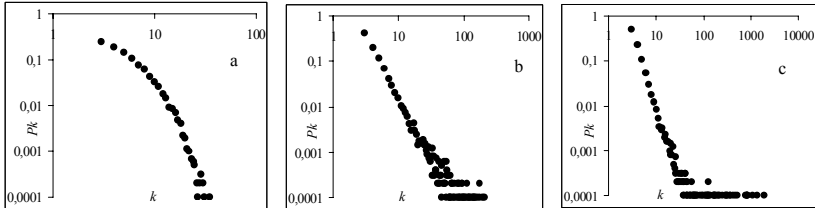
В этом случае для малых значений  $M$  распределение степеней имеет экспоненциальную форму, и сеть является ассортативной. С увеличением  $M$  сеть становится масштабно-инвариантной, при этом характер корреляций меняется, а именно, сеть становится сначала некоррелированной, и при дальнейшем росте  $M$  приобретает дисассортативный характер. Таким образом, имеет место топологический фазовый переход, сопровождаемый изменением характера корреляций в сети.



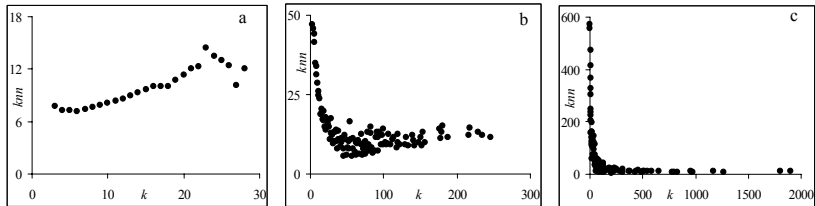
**Рис. 5.** Распределения степеней для ЛМК сети с степенным распределением ФП  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ :  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ ;  $\psi = 2$ .

Исследование локально-мировых сетей с конкуренцией для случая степенного распределения фитнес-параметров  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ , проводилось для различных значений  $\psi$ . Ниже мы приводим результаты для

значений  $\psi = 2$  и 3. На рис. 5–6 показаны распределения степеней для соответствующих сетей, на рис. 7–8 — зависимости  $\bar{K}_{nn}(k)$ .

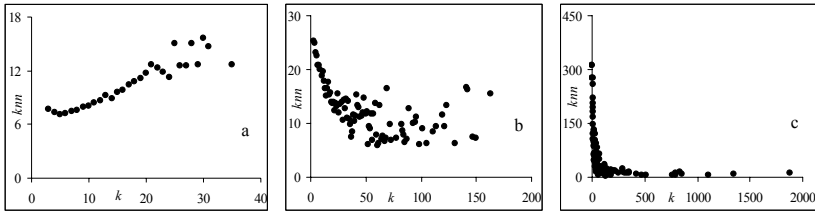


**Рис. 6.** Распределения степеней для ЛМК сети с степенным распределением ФП  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ :  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ ;  $\psi = 3$ .

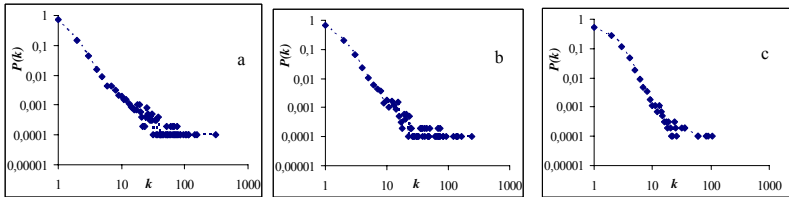


**Рис. 7.** Зависимость  $\bar{K}_{nn}(k)$  для ЛМК сети с степенным распределением ФП  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ :  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ ;  $\psi = 2$ .

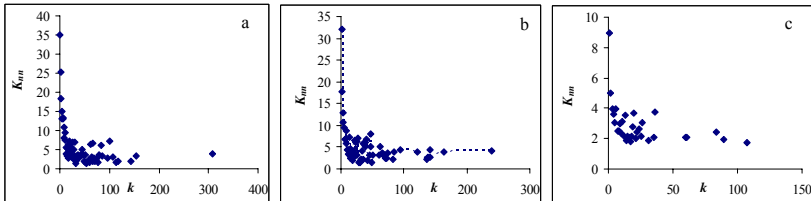
Из рисунков следует, что и в этом случае при увеличении размера локального мира  $M$  топология сети меняется от экспоненциальной к степенной, и это сопровождается изменением характера корреляций. Необходимо отметить, что показатель распределения степеней чувствителен к показателю  $\psi$  степенного распределения фитнес-параметра. С увеличением  $\psi$  показатель  $\gamma$  также увеличивается. По сравнению со случаем однородного распределения фитнес-параметра здесь переход при увеличении  $M$  от ассортативной к дисассортативной сети происходит практически без промежуточного некоррелированного состояния.



**Рис. 8.** Зависимость  $\bar{K}_{nn}(k)$  для ЛМК сети с степенным распределением ФП  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ :  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ ;  $\psi = 3$ .



**Рис. 9.** Распределения степеней для ЛМ сети с конкуренцией и старением:  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ ,  $\psi = 2$ ,  $m = m_0 = 1$ ,  $M = 50$ , а)  $\alpha = 0,2$ ; б)  $\alpha = 1$ ; в)  $\alpha = 2$ .



**Рис. 10.** Зависимость  $\bar{K}_{nn}(k)$  для ЛМ сети с конкуренцией и старением:  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ ,  $\psi = 2$ ,  $m = m_0 = 1$ ,  $M = 50$ , а)  $\alpha = 0,2$ ; б)  $\alpha = 1$ ; в)  $\alpha = 2$ .

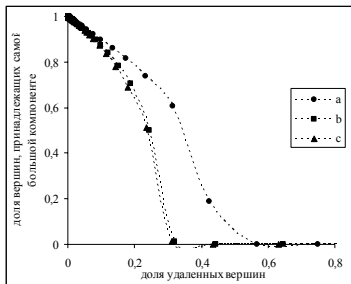
На рис. 9–10 показаны распределения степеней и зависимости  $\bar{K}_{nn}(k)$  для локально-мировой сети с конкуренцией и старением при разных значениях показателя старения  $\alpha$ . Сети сгенерированы при следующих параметрах модели:  $m = m_0 = 1$ ,  $T = 10000$ ,  $M = 50$ ; а)  $\alpha = 0,2$ ; б)  $\alpha = 1$ ; в)  $\alpha = 2$ .

С ростом  $\alpha$  топология сети меняется от степенной к экспоненциальной, и этот переход сопровождается переходом от дисассортативной сети к некоррелированной. Таким образом, старение узлов приводит к разрушению корреляций в сети. При малых значениях

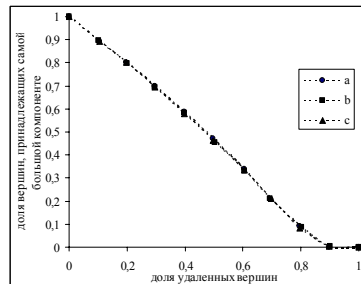


разрушению корреляций в сети. При малых значениях  $M \approx t$  старение не оказывает влияния на топологию и характер корреляций сети.

**Устойчивость локально-мировых сетей с конкуренцией и старением.** Для анализа устойчивости рассматривалось два типа воздействий на сеть — случайные отказы узлов и направленные атаки. В первом случае из сети случайным образом удалялась доля  $p$  вершин. Во втором, из сети удалялись вершины со степенью  $k > k_{cutoff}$ . Строились зависимости доли вершин сети, принадлежащих наибольшей связанной компоненте, от доли удаленных вершин (при изменениях  $p$  и  $k_{cutoff}$ , соответственно). Определялся порог, то есть такое значение доли удаленных вершин, при котором сеть «рассыпается», т.е. доля вершин, принадлежащих наибольшей связанной компоненте, становится близка к нулю и, тем самым, система теряет свое целостное свойство.



**Рис. 11.** Устойчивость по отношению к направленным атакам для ЛМ сети:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .



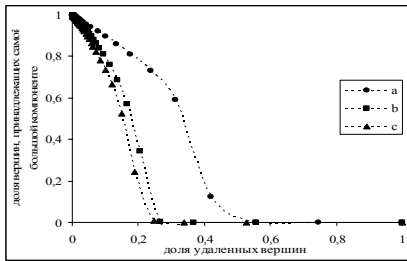
**Рис. 12.** Устойчивость по отношению к случайным отказам для ЛМ сети:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .

Анализ устойчивости сетей проводился для различных размеров локального мира  $M$ .

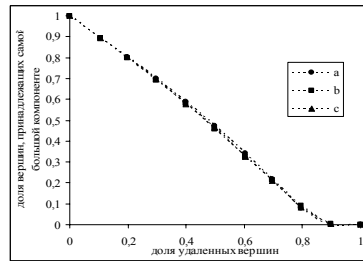
На рис. 11 и 12 приведены результаты исследования устойчивости локально-мировых сетей по отношению к направленным атакам и случайным отказам. Как видно из рисунков, по отношению к случайным отказам устойчивость ЛМ сетей от размера локального мира  $M$  практически не зависит. По отношению к направленным атакам пороговые значения уменьшаются с ростом размера малого мира  $M$ .

Анализ устойчивости сетей, сгенерированных в соответствии локально-мировой моделью с конкуренцией, также проводился для раз-

личных размеров локального мира  $M$  и для двух видов распределения фитнес-параметра  $\rho(\eta)$ ; однородного и степенного. На рис. 13 и 14 приведены результаты исследования устойчивости по отношению к направленным атакам и случайным отказам для случая однородного распределения фитнес-параметров. Как видно из рисунков, по отношению к случайным отказам устойчивость от размера локального мира  $M$  практически не зависит. По отношению к направленным атакам пороговые значения уменьшаются с ростом размера локального мира  $M$ , причем быстрее, чем в случае локально-мировой модели без учета фитнес-параметра.

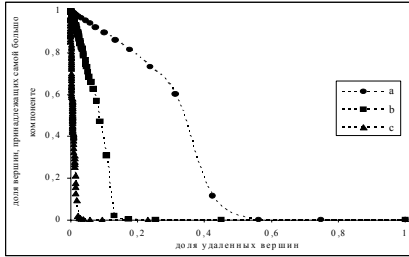


**Рис. 13.** Устойчивость по отношению к направленным атакам для ЛМК сети с однородным распределением значений фитнес-параметра:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .

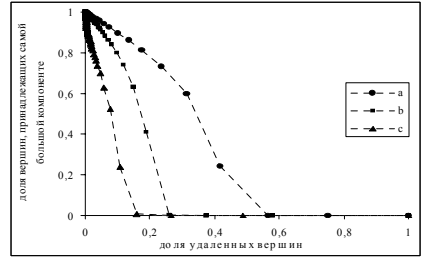


**Рис. 14.** Устойчивость по отношению к случайным отказам для ЛМК сети с однородным распределением значений фитнес-параметра:  $m = m_0 = 3$ ,  $T = 10000$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ .

На рис. 15–16 приведены результаты исследования устойчивости по отношению к направленным атакам локально-мировых сетей с конкуренцией для случая степенного распределения фитнес-параметра. Как видно из рисунков, пороговые значения уменьшаются с ростом размера локального мира  $M$ , причем при меньших значениях  $\alpha$  быстрее. При увеличении показателя степенного распределения фитнес-параметра для больших размеров локального мира  $M$ , значение порога увеличивается.



**Рис. 15.** Устойчивость по отношению к направленным атакам для ЛМК сети с степенным распределением ФП  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ :  $m = m_0 = 3$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ ;  $\psi = 2$ .



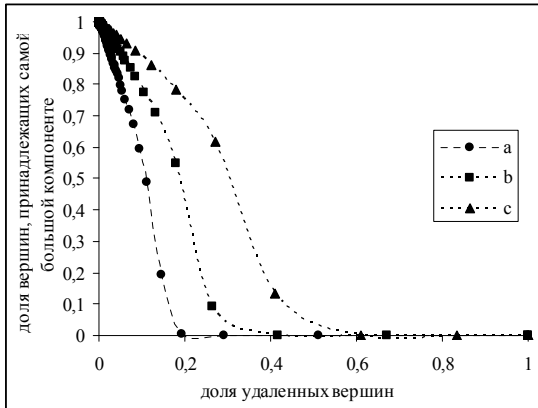
**Рис. 16.** Устойчивость по отношению к направленным атакам для ЛМК сети с степенным распределением ФП  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ :  $m = m_0 = 3$ , а)  $M = 3$ ; б)  $M = 50$ ; в)  $M = 500$ ;  $\psi = 3$ .

На рис. 17 приведены результаты исследования устойчивости локально-мировых сетей с конкуренцией и старением.

При относительно небольших значениях  $M$ , когда сеть все еще ассортативна, она оказывается более устойчивой к направленным атакам, чем для больших значений  $M$ , когда сеть становится дисассортативной. В обоих случаях с увеличением показателя старения  $\alpha$  происходит увеличение порога устойчивости сети.

**Обсуждение результатов.** Проведенный анализ устойчивости локально-мировых сетей с конкуренцией и старением по отношению к случайным отказам и направленным атакам, позволяет сделать ряд выводов.

По отношению к случайным отказам некоррелированные и коррелированные сети ведут себя практически одинаково. По отношению к направленным атакам устойчивость дисассортативных сетей оказывается значительно меньше, чем для некоррелированных масштабно-инвариантных сетей, а устойчивость ассортативных сетей, напротив, значительно выше.



**Рис. 17.** Устойчивость по отношению к направленным атакам для ЛМ сети с конкуренцией и старением; распределение ФП  $\rho(\eta) = C\eta^{-\psi}$ ,  $\psi = 2$ ;  $m = m_0 = 3$ ,  $M = 50$  при а)  $a = 0,2$ ; б)  $a = 1$ ; в)  $a = 2$ .

Необходимо отметить, что с изменением размера локального мира  $M$  происходит трансформация топологии ЛМ сети от экспоненциальной к степенной. Вследствие этого возникает зависимость устойчивости ЛМ сетей от размера локального мира, а именно, при увеличении размера локального мира устойчивость сети уменьшается. В этом случае при росте размера локального мира  $M$  происходит переход от ассортативной сети к некоррелированной. Пороговые значения устойчивости локально-мировой сети по отношению к направленным атакам уменьшаются с увеличением размера локального мира  $M$ .

Топология ЛМК сети определяется как распределением фитнес-параметров, так и размером локального мира  $M$ . В случае однородного распределения фитнес-параметров топология ЛМК сети с изменением размера локального мира  $M$  трансформируется от экспоненциальной к приближенно степенной (распределение степеней является степенным только при больших значениях  $k$ ). Важно подчеркнуть, что в случае ЛМФ сети имеет место изменение характера корреляции в сети, а именно, если при размерах локального мира  $M$  порядка числа добавляемых ребер  $m_0$  сеть носит явно выраженный ассортативный характер, то при увеличении  $M$  она сначала становится некоррелированной, а затем, ди-

сассортативной. И в этом случае по отношению к случайным отказам ассортативные и дисассортативные ЛМК сети ведут себя практически одинаково. По отношению к направленным атакам устойчивость дисассортативных ЛМФ сетей оказывается значительно меньше, чем для ассортативных ЛМФ сетей.

Исследование локально-мировых сетей с конкуренцией и старением показывает, что с увеличением показателя старения  $\alpha$  происходит увеличение порога устойчивости сети по отношению к направленным атакам, что, по-видимому, связано как с изменением топологии, так и характера корреляций.

Таким образом, локально-мировая модель с конкуренцией и старением проявляет более широкий спектр свойств. С учетом возможностей изменения распределения фитнес-параметра, она представляет собой более мощный инструмент для анализа сетей реального мира.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Albert R., Barabási A.-L.* Statistical Mechanics of Complex Networks // *Rev. Mod. Phys.* — 2002. — Vol. 74. — P. 43–97.
- Bianconi G., Barabási A.-L.* Competition and multiscaling in evolving networks // *Europhys. Lett.* — 2001. — Vol. 54. — P. 436–442.
- Boccaletti S., Latora V. et al.* Complex networks: Structure and dynamics // *Physics Repor.* — 2006. — Vol. 424. — P. 175–308.
- Caldarelli G.* Scale-Free Networks: Complex Webs in Nature and Technology — Oxford: Oxford University Press, 2007. — P. 272.
- Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F.* Evolution of networks // *Adv. Phys.* — 2002. — Vol. 51. — P. 1079–1187.
- Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F.* Evolution of networks with aging of sites // *Phys. Rev. E.* — 2000. — Vol. 62. — P. 1842–1845.
- Li X., Chen G.* A local-world evolving network model // *Physica A.* — 2003. — Vol. 328. — P. 274–286.

## **EFFECT OF AGING ON A LOCAL-WORLD NETWORK WITH COMPETITION**

**Gadjiev B. R., Progulova T. B., Shchetinina D. P.**

*We present an algorithm for generation of local-world networks with nodes' competition that is a generalization of the local-world evolving network model. We generated such networks for different distributions of fitness parameters and showed that changing distribution of fitness parameter strongly alters network topology. Besides, we demonstrate that in cases of homogeneous and power-law distributions of the fitness parameter network alters from assortative to non-correlated and then to disassortative. For these cases we studied network resistance to random-type failures and targeted attacks.*