МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ ЛАЗЕРА С ПРОСВЕТЛЯЮЩИМСЯ ФИЛЬТРОМ

Горбунова Ю. А.

Настоящая работа посвящена исследованию математической модели оптического квантового генератора, описываемого неоднородной системой дифференциальных уравнений. Изучены математические модели, представленные системой дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметра и вектор-функцией, содержащей нелинейность Задачей исследования является разработка методов нахождения периодических режимов работы оптического квантового генератора.

Введение. В настоящее время диапазон задач, стоящих перед физикой оптических квантовых генераторов, в которых приходится учитывать режимы работы, стал весьма широким. Поскольку область приложения обширна, то естественны сложность и многообразие получаемых математических моделей.

В силу этих причин общего решения поставленной проблемы пока не найдено. В частности, имеются пробелы в изучении условий существования периодических режимов работы лазеров, в окрестности нуля. Таким образом, задача поиска условий существования ненулевых периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений является актуальной.

Модель. Полная система балансных уравнений лазера с просветляющимся фильтром состоит из трех уравнений и в безразмерной форме имеет вид:

$$\dot{m} = Gm\left(n - 1 + n_a\right), \dot{n} = \alpha - n\left(m + 1\right), \quad \dot{n}_a = \alpha_a \delta - n_a\left(\rho m + \delta\right) \qquad (1)$$

Физические величины, входящие в систему (1) не могут быть измерены точно, поэтому их значения можно представить в виде:

$$G = G_0 + \lambda_1, 1 = 1 + \lambda_2, 1 = 1 + \lambda_3, \delta = \delta_0 + \lambda_4, \rho = \rho_0 + \lambda_5, \qquad (2)$$

где λ_i — некоторая ошибка измерения, заданная на множестве $\Lambda(\delta_0) = \{\lambda, |\lambda| \le \delta_0\}$.

Перепишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} \dot{m} = \left(G + \lambda_1\right) m \left(n - 1 - \lambda_2 + n_a\right), \\ \dot{n} = \alpha - n\left(m + 1 + \lambda_3\right), \\ \dot{n}_a = \alpha_a\left(\delta_0 + \lambda_4\right) - n_a\left(\left(\rho + \lambda_5\right) m + \delta_0 + \lambda_4\right). \end{cases} \tag{3}$$

Пусть состоянием равновесия для системы (1) является точка с координатами $\left(m^0, n^0, n_a^0\right)$, а для системы (3) $\left(\overline{m}, \overline{n}, \overline{n}_a\right)$ где $\overline{m} = m(\lambda)$, $\overline{n} = n(\lambda)$, $\overline{n}_a = n_a(\lambda)$, $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $n_a(\lambda)$ непрерывны и таковы, что при $\lambda \to 0$, $m(\lambda) \to m^0, n(\lambda) \to n^0, n_a(\lambda) \to n_a^0$.

Сделаем замену $x_1 = m - m(\lambda), x_2 = n - n(\lambda), x_3 = n_a - n_a(\lambda)$.

Тогда систему уравнений (3), можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = \overline{A}x + \overline{B}(\lambda)x + \overline{f}(x, \lambda). \tag{3a}$$

Матрица системы линейного приближения (3а) определяется равенством

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} G_0\left(n^0 - 1 + n^0{}_a\right) & G_0 m^0 & G_0 m^0 \\ -n^0 & -(m^0 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\delta_0 + \rho_0 m^0\right) \end{pmatrix},$$

матрица $\overline{B}(\lambda)$ — равенством

$$\overline{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} G_0\left(q(\lambda) + r(\lambda) - \lambda_2\right) & m^0\lambda_1 + (G_0 + \lambda_1)p(\lambda) & m^0\lambda_1 + (G_0 + \lambda_1)p(\lambda) \\ -q(\lambda) & -(p(\lambda) + \lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\lambda_4 + \lambda_5(m^0 + p(\lambda))\right) \end{pmatrix},$$

3-мерная вектор-функция $\overline{f}(x, \lambda)$ — равенством

$$\overline{f}(x, \lambda) = \left(\left(G_0 + \lambda_1\right)x_1\left(x_2 + x_3\right), -x_2 x_3, -x_3 x_1(\rho_0 + \lambda_5)\right).$$

Для системы (3а) ставится задача определить условия существования периодических режимов оптического квантового генератора с просветляющимся фильтром.

В общем случае система (3а) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(\lambda)x + f(x,\lambda), \tag{4}$$

где x — n-мерный вектор, A и $B(\lambda)$ — матрицы размером $n \times n$, $f(x,\lambda)$ — n-мерная вектор-функция.

Введем следующие обозначения:

$D(\delta_0) = \{(t,x,\lambda): t \in [0,\omega], x \in E_n, |x| \le \delta_0, \lambda \in E_m, |\lambda| \le \delta_0\}$,

$\Lambda(\delta_0) = \{\lambda \in E_m : |\lambda| \le \delta_0\}$,

$W(\delta_0) = \{\alpha \in E_n : |\alpha| \le \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$.

Будем предполагать, что на $\Lambda(\delta_0)$ матрица $B(\lambda)$ определена и непрерывна по λ, так непрерывны $q(\lambda)$, $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ и при $\lambda \to 0$, $B(\lambda) \to 0$.

На $D(\delta_0)$ $f(t,x,\lambda)$ — n-мерная вектор-функция, определена и непрерывна, $f(t,0,\lambda) = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,\lambda)}{|x|} = 0$ равномерно по λ.

Будем также предполагать, что на множестве $D(\delta_0)$ система (4) обладает свойством единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра. Обозначим решение системы (4) следующим образом $x(t,\alpha,\lambda)$, $x(0,\alpha,\lambda) = \alpha$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $x \equiv 0$ является решением системы (4), тогда по теореме о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра существует число $\delta_1 \in (0,\delta_0]$, такое, что при любых $\alpha \in W(\delta_1), \lambda \in \Lambda(\delta_1)$ система (4) имеет решение $t \to x(t,\alpha,\lambda)$, определенное на $[0,\omega]$ и непрерывное по совокупности переменных на множестве $[0,\omega] \times W(\delta_1) \times \Lambda(\delta_1)$ и при любом $t \in [0,\omega]$ $|x(t,\alpha,\lambda)| \le \delta_0$.

Ставится задача найти условия существования периодического решения системы (4) (то есть существования периодического режима оптического квантового генератора, определяемого математической моделью системой (3а)).

Результаты. Одновременно с системой (4) рассмотрим систему (5) вида

$$\dot{y} = Ay + B(\lambda)x(t,\alpha,\lambda) + f(t, x(t,\alpha,\lambda),\lambda) \,. \qquad (5)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Решение $t \to x(t,\alpha,\lambda)$ системы (5) является решением системы (4) и наоборот. Решение $t \to y(t)$ с начальным условием $y(0) = \alpha$ является решением (4) и выполняется равенство $y(t) = x(t,\alpha,\lambda)$ для любого $t \in [0,\omega]$.

Доказательство. Так как $t \to x(t,\alpha,\lambda)$ решение системы (4), то для любого $t \in [0,\omega]$ выполняется равенство

$$\dot{x}(t,\alpha,\lambda) = Ax(t,\alpha,\lambda) + B(\lambda)\cdot x(t,\alpha,\lambda) + f(x(t,\alpha,\lambda),\lambda) \,.$$

Это значит, что $t \to x(t,\alpha,\lambda)$ есть решение системы (4).

Пусть теперь $t \to y(t), y(0) = \alpha$ является решением системы (5), но другое решение системы (5) есть $t \to x(t,\alpha,\lambda)$. Таким образом, система (5) имеет два решения, удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям. Тогда по свойству системы (5) они совпадают при любом $t \in [0,\omega]$, т.е. $y(t) = x(t,\alpha,\lambda)$, т.е. $t \to y(t)$ есть решение системы (4).

Так как решение системы имеет вид

$$y(t) = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)\Big(f\big(\xi, x(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\big) + B(\lambda)\cdot x(t,\alpha,\lambda)\Big)d\xi, y(0) = \alpha \,,$$

$$y(t) = x(t,\alpha,\lambda) \,,$$

и тогда решение $x(t,\alpha,\lambda)$ принимает вид:

$$x(t) = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)\Big(f\big(\xi, x(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\big) + B(\lambda)\cdot x(t,\alpha,\lambda)\Big)d\xi. \qquad (6)$$

Следовательно, вектор-функция, определяемая равенством (6), является решением системы (4).

Рассмотрим другое представление решения системы (4).

Теорема 2. Решение системы (4) может быть представлено равенством

$$x(t,\alpha,\lambda) = X(t)\alpha + o(|\alpha|) + O(|\lambda|)|\alpha| \,,$$

где $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$, $X(0) = E$, E — единичная матрица, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{o(|\alpha|)}{|\alpha|} = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to 0} O(\lambda) = 0$.

Доказательство.

$$x(t,\alpha,\lambda) = X(t)\alpha + X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)\left[B(\lambda)x(\xi,\alpha,\lambda) + f\left(x(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\right)\right]d\xi .$$

Установим факт, что $\dfrac{|x(t,\alpha,\lambda)|}{|\alpha|}$ ограничена на множестве $[0;\omega]\times W(\delta_1)\times \Lambda(\delta_1)$.

Убедимся, что $X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)B(\lambda)\cdot x(\xi,\alpha,\lambda)d\xi = O(|\lambda|)$, обозначим $\dfrac{|x(t,\alpha,\lambda)|}{|\alpha|} = \Psi(t,\alpha,\lambda)$, $\Psi(t,\alpha,\lambda)$ — ограниченная функция. Откуда $|x(t,\alpha,\lambda)| = |\alpha|\cdot\Psi(t,\alpha,\lambda)$,

$$X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)B(\lambda)\cdot x(\xi,\alpha,\lambda)d\xi = X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)B(\lambda)\cdot|\alpha|\cdot\Psi(\xi,\alpha,\lambda)d\xi ,$$

$|\alpha|\lim\limits_{\lambda\to 0} X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)B(\lambda)\cdot\Psi(\xi,\alpha,\lambda)d\xi = 0$, значит,

$$X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)B(\lambda)\cdot x(\xi,\alpha,\lambda)d\xi = O(|\lambda|).$$

Убедимся, что $X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)f\left(x(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\right)d\xi = O(|\lambda|)$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x(t,\alpha,\lambda),\lambda)}{|\alpha|} = 0$ равномерно относительно $(t,\lambda)\in[0,\omega]$, $\alpha\in W(\delta_1)$, $\lambda\in\Lambda(\delta_1)$. Тогда $\forall\, t\in[0;\omega]$, $\alpha\in W(\delta_1)$, $\lambda\in\Lambda(\delta_1)$ имеет место неравенство:

$$\frac{1}{|\alpha|}\left|X(t)\int_0^t X^{-1}(\xi)f\left(x(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\right)d\xi\right| \le K^2\int_0^t \left|f\left(x(\xi,\alpha,\lambda),\lambda\right)\right|\cdot\frac{1}{|\alpha|}d\xi ,$$

где $\left\|X(t)\right\| \leq K$, $\left\|X^{-1}(t)\right\| \leq K$, $K^2 \int\limits_0^t \left| \frac{f(x(\xi,\alpha,\lambda),\lambda)}{|x(\xi,\alpha,\lambda)|} \right| \cdot \frac{|x(\xi,\alpha,\lambda)|}{|\alpha|} d\xi = 0$, а

это значит, что $\frac{1}{|\alpha|} X(t) \int\limits_0^t X^{-1}(\xi) \cdot f(x(\xi,\alpha,\lambda),\lambda) d\xi = o(|\alpha|)$.

Таким образом, решение системы можно представить в виде: $x(t,\alpha,\lambda) = X(t)\alpha + o(|\alpha|) + O(|\lambda|)|\alpha|$, где $X(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$, $x(0) = E$. E — единичная матрица системы.

Теорема 3. Если $\det(X(\omega) - E) \neq 0$, то существует окрестность точки $(\alpha,\lambda) = 0$, в которой нет ненулевого решения уравнения (4), а система (3а) не имеет периодического решения в достаточно малой окрестности $x = 0$.

При выполнении условий теоремы существует окрестность точки (m^0, n^0, n_α^0), в которой нет периодических режимов, отличных от стационарных режимов.

Заключение. Лазеры широко применяются в самых разных областях науки и техники. Сочетание уникальных свойств выходного излучения с относительной простотой конструкции позволило этим приборам занять одну из ведущих позиций в области лазерной техники. Диапазон их применения непрерывно расширяется, а требования к выходным характеристикам ужесточаются.

Для создания лазеров с заданными выходными параметрами, поиска новых конструктивных решений, для сокращения материальных затрат и сроков разработки необходимо ясное понимание физических процессов, протекающих в лазерах, и возможность использовать при их разработке методы математического моделирования. Этим в значительной степени обусловлен неослабевающий интерес к изучению физических процессов в лазерах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. — М. Наука, 1980.

Тарасов Л.В. Физика процессов в генераторах когерентного оптического излучения. — М. Радио и связь, 1981.

Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М. Мир, 1970.

MATHEMATICAL MODEL OF LASER WITH SATURABLE ABSORBER OPERATION

Gorbunova Ju. A.

Operation of an optical quantum generator (laser) with saturable absorber was studied by means of mathematical modeling. Nonhomogeneous systems of the differential equations with coefficients depending on a parameter and nonlinear vector-function are studied. The aim of the research is to develop procedure for discovering of periodic operation modes of the optical quantum generator.