

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ГОСУДАРСТВ МИРА

Кирилюк И. Л., Малков С. Ю.

Приведён сравнительный анализ точности гиперболической и экспоненциальной аппроксимации зависимости ВВП на душу населения от времени в различных странах мира. Предложена возможная причина возникновения степенного роста некоторых показателей в социальных системах и приведена соответствующая базовая модель.

Сравнение степенной и экспоненциальной аппроксимации экономического роста стран мира. Время от времени возникают дискуссии о том, подчиняются ли реальные механизмы развития некоторых процессов в природе и обществе формулам экспоненциального, или же степенного (гиперболического) роста. Дело в том, что не всегда возможно сделать надёжные выводы по эмпирическим данным. При этом для процессов с достоверным экспоненциальным ростом каких-либо параметров природа закономерности часто очевидна. Но ряд процессов в определённом временном диапазоне гораздо более точно описываются степенной функцией, чем экспонентой. Таким свойством обладала, например динамика числа людей на земле примерно до 1970-х годов (Foerster et al, 1960).

Предметом исследований в данной статье является математический анализ экономического развития регионов по данным мировой статистики (Maddison, 2001). Как известно, зависимость ВВП на душу населения мира, как и зависимость численности населения мира от времени на значительном временном интервале с высокой точностью аппроксимируется степенной зависимостью (Капица, 1992; Кирилюк и др., 2007; Коротчаев и др., 2005; Подлазов, 2002; Foerster et al., 1960; Kremer, 1993 и др.). Этот факт отражает наличие глобальных нелинейных процессов в обществе с положительной обратной связью. Экономическое развитие определяется развитием науки и технологий, и в основе механизма положительной обратной связи в данном случае может выступать конвергенция технологий, а также процессы глобализации и симбиоз между различными государствами. При этом не только растёт

средний валовый внутренний продукт (ВВП) стран, но и нарастают различия в ВВП на душу населения для различных государств.

Чтобы получить целостную картину, рассчитана точность гиперболической аппроксимации степенным уравнением вида

$$A(t) = C / (t_0 - t)^k \quad (1)$$

а также, для сравнения точность экспоненциальной аппроксимации уравнениями вида

$$A(t) = C' \exp(k't) \quad (2)$$

ВВП на душу населения ($A(t)$) для основных государств мира. Здесь k, k' — показатели степени, C, C' — константы, t_0 — параметр, характеризующий момент ухода степенной кривой в бесконечность.

Аппроксимация степенной функцией производилась следующим образом: в исходном уравнении вида (1) производилась замена переменных — переход к натуральным логарифмам от показателя ВВП/чел, $Y_i = \ln(A_i(t))$ и преобразование времени по формуле $\tau_i = \ln(t_0 - t_i)$, где i — номера момента времени и соответствующего показателя в ряду данных.

По t_0 проводился перебор от 2004 года до 3004 года (так как использовались имеющиеся данные по 2003г. включительно).

Приведённые преобразования координат приводят уравнение к линейному, что позволяет (в предположении выполнения условий Гаусса–Маркова) применить линейную аппроксимацию методом наименьших квадратов по формуле:

$$Y = \phi(\tau) = \left(M_Y - \frac{K_{\tau Y}}{S^2} M_\tau \right) + \frac{K_{\tau Y}}{S^2} \tau,$$

где вспомогательные величины введены по следующим формулам:

$$M_\tau = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tau_i, \quad M_Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i, \quad K_{\tau Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_i - M_\tau)(Y_i - M_Y);$$

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tau_i - M_\tau)^2,$$

N — длина временного ряда показателя.

Обозначая параметры линейной зависимости в формуле для $\phi(\tau)$,

$$k = -\frac{K_{\tau Y}}{S^2} \text{ и } k_0 = M_Y + kM_\tau,$$

мы в итоге получаем, что k — показатель степени в формуле (1), а k_0 — натуральный логарифм показателя C в (1).

Затем вычислялся коэффициент детерминации по формуле:

$$R^2 = S_{рег} / (S_{рег} + S_{ост}),$$

$$\text{где } S_{рег} = \sum_{i=1}^N (Y_i - M_Y)^2, \quad S_{ост} = \sum_{i=1}^N (Y_i - \phi(\tau_i))^2,$$

и находились те значения t_0 , для которых он максимален.

Для экспоненциальной аппроксимации (2) разница с приведённым алгоритмом аппроксимации в том, что не производится логарифмирование разности времен, а также нет нужды в переборе по t_0 .

Как оказалось, среди стран мира выделяется подгруппа стран, хорошо описываемых гиперболами с моментами обострения (то есть моментами ухода величины в бесконечность) в ближайшие десятилетия. Эти страны намного лучше аппроксимируются степенными зависимостями, чем экспоненциальными.

Примерами таких стран (с указанием в скобках коэффициента детерминации для соответственно экспоненциальной и степенной аппроксимации) являются Ирландия (0.718 и 0.988), Великобритания (0.630 и 0.968), Нидерланды (0.611 и 0.958) и др.

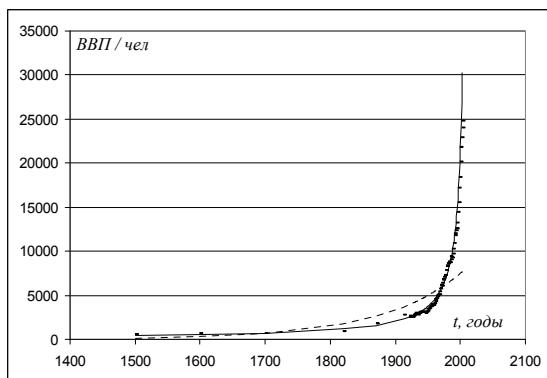


Рис. 1. График, демонстрирующий точность наилучшей аппроксимации зависимости ВВП/чел от времени по формуле (1) — степенной зависимостью (сплошная линия) и по формуле (2) — экспоненциальной (пунктирная линия) для Ирландии, точки обозначают эмпирические данные.

Гиперболическая аппроксимация на рис. 1 подчиняется формуле $A(t) = \exp(12.453) \cdot (2011 - t)^{-1.027}$.

Другая группа стран хорошо описывается степенной зависимостью с более отдалённым (на столетия) моментом обострения. Эти страны имеют хорошую точность не только степенной, но и экспоненциальной аппроксимации для ВВП на душу населения.

Примерами таких стран являются Колумбия (0.987 и 0.990), Лаос (0.971 и 0.989), Пакистан (0.980 и 0.980) и др.

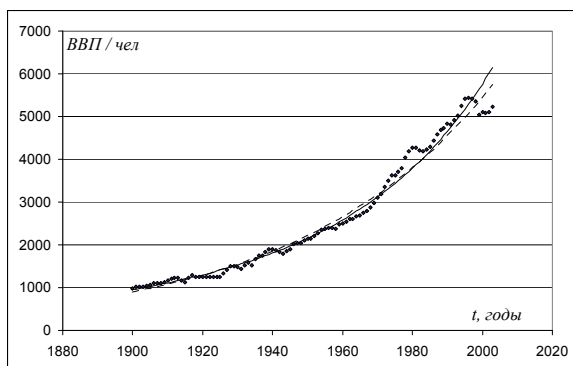


Рис. 2. График, демонстрирующий точность наилучшей аппроксимации зависимости ВВП/чел от времени по формуле (1) — степенной зависимостью, (сплошная линия) и по формуле (2) — экспоненциальной (пунктирная линия) для Колумбии, точки обозначают эмпирические данные.

Гиперболическая аппроксимация на рис. 2 подчиняется формуле $A(t) = \exp(34.297) \cdot (2218 - t)^{-4.761}$, а экспоненциальная формуле $A(t) = \exp(0,01796t - 27.3265)$.

И, наконец, существует множество стран, для которых ни степенная, ни гиперболическая аппроксимация не приемлемы, это в основном бедные страны.

Примерами таких стран являются Габон (0.512 и 0.512), Уганда (0.506 и 0.506) и др.

Общая картина соотношения коэффициентов детерминации при степенной и экспоненциальной аппроксимации динамики ВВП на душу населения для стран мира, представленных в базе Мэддисона (Maddison, 2001), представлена на рисунке 4.

Из рисунка видно, что в подавляющем большинстве случаев рост ВВП лучше аппроксимируется степенными, а не экспоненциальными зависимостями.

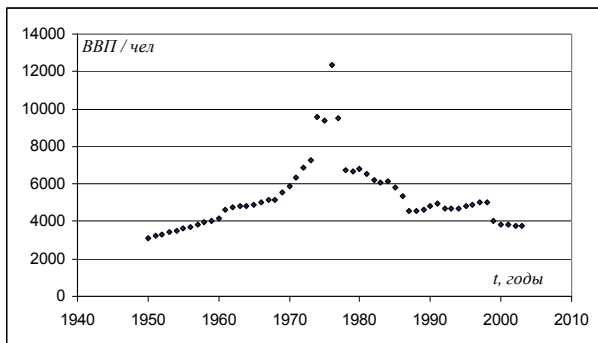


Рис. 3. Динамика ВВП на душу населения для Габона, не имеющая достоверной степенной или экспоненциальной аппроксимации.

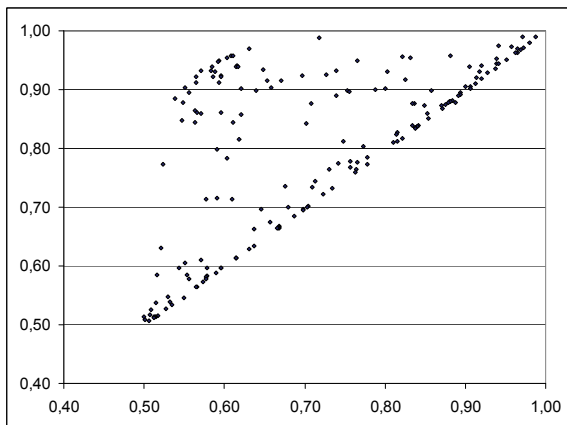


Рис. 4. Соотношение коэффициентов детерминации R^2 при степенной (ось ординат) и экспоненциальной (ось абсцисс) аппроксимации динамики ВВП на душу населения для стран мира.

Модель возникновения степенного роста в социальных явлениях. То, что степенная аппроксимация для многих стран мира дает лучший результат, чем экспоненциальная, что требует дополнительного объяснения. Попробуем дать интерпретацию природы степенной зависимости от времени для экономического роста некоторых стран. Существуют различные объяснения гиперболического роста социальных процессов (таких, как увеличение численности населения страны и др.),

например, в работах (Капица, 1992; Коротаяев и др., 2005; Подлазов, 2002; Kretmer, 1993) и в ряде других публикаций. Одним из основных факторов, который принципиально отличает гиперболический рост от экспоненциального, является внутреннее единство системы (нарушение принципа суперпозиции и независимости подсистем друг от друга). В системе должна существовать особая положительная обратная связь, обуславливающая ускорение развития.

Мы полагаем, что в основе нелинейной положительной обратной связи в рассматриваемых явлениях лежит конкуренция. Роль конкуренции в экономике общеизвестна, в различных ситуациях ее влияние может оказывать как положительное, так и отрицательное влияние на экономический рост. Однако в долгосрочной перспективе в мировой экономике и демографии берёт верх именно фактор положительного влияния конкуренции.

Приведём простейший вариант модели, формализующий представление о конкуренции между двумя экономическими системами (например, государствами).

Если два государства постоянно сравнивают уровни своего экономического развития и стремятся опередить друг друга, увеличивая темпы роста то такая ситуация может быть описана базовой системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha xy \\ \dot{y} &= \beta xy \end{aligned} \tag{3}$$

В системе (3) можно легко выделить интеграл движения вида

$$\beta x - \alpha y = C, \tag{4}$$

с помощью которого система (3) может быть преобразована к виду уравнения Бернулли

$$\dot{x} = x(\beta x - C), \quad \dot{y} = y(C + \alpha y), \tag{5}$$

при этом переменные линейно связаны посредством (4).

Видно, что в (5) есть линейный член, связанный с константой, определяемой всеми параметрами и начальными условиями, и квадратичный член, который определяется коэффициентом, отвечающим за динамику системы–конкурента.

В случае $C = 0$ получаются степенные уравнения в чистом виде (например, в случае равных начальных условий и равенства коэффициентов $\alpha = \beta$ система (3) сводится к двум одинаковым уравнениям для гипербол).

Экспоненциальное уравнение получается, когда коэффициент в уравнении конкурента равен нулю (то есть, когда конкурент не развивается и его экономический рост отсутствует).

Таким образом, базовая модель вида (3) в зависимости от условий может описывать как экспоненциальные, так и степенные процессы; с ее помощью может описываться широкий круг динамических явлений в природе и обществе с активным участием нескольких агентов.

Работа поддержана РФФИ (проект № 08–06–00319).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Каница С.П.* Математическая модель роста населения мира // *Математическое моделирование*. — 1992. — Т. 4, № 6. — С. 65–79.
- Кирилюк И.Л., Малков С.Ю., Малков А.С.* Нелинейные особенности развития и взаимодействия социально-экономических систем // *Стратегическая стабильность*. — 2007. № 2. — С. 62–68.
- Коротаев А.В., Малков А.С., Халтурина Д.А.* Законы истории: математическое моделирование исторических макропроцессов (Демография, экономика, войны). — М.: КомКнига, 2005.
- Подлазов А.В.* Теоретическая демография. Модели роста народонаселения и глобального демографического перехода // *Новое в синергетике: Взгляд в третье тысячелетие*. Сб. статей под ред. проф. Г.Г.Малинецкого и чл.-корр. РАН С.П.Курдюмова — М. Наука 2002.
- Foerster H., Mora P., Amiot L.* Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026 // *Science*. — 1960. — Vol. 132. — P. 1291–1295.
- Kremer, M.* Population growth and technological change: One million B.C. to 1990 // *The quarterly journal of economics*. — 1993. — Vol. 108. P. 681–716.
- Maddison A.* The world economy: a millennial perspective. — OECD, 2001.

STATISTICAL PATTERNS OF ECONOMIC GROWTH OF DIFFERENT COUNTRIES

Kirilyuk I. L., Malkov S. Yu.

The theme of our researches is comparative analysis of accuracy of hyperbolic and exponential approximation for GDP per capita growth in different countries. We suggest a simple model showing how hyperbolic growth emerges in social systems.