ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

Горицкий Ю.А., Казаков В.А.[1]

Московский энергетический институт, каф. Мат. Моделирования, Goritskiy@ya.ru
[1]Национальный политехнический институт, Мехико, vkazakov41@hotmail.com

Разработана статистическая процедура дискретизации и восстановления (ПДВ) для Марковских процессов с конечным множеством состояний и непрерывным временем. Описанию ПДВ случайных процессов посвящена обширная литература, но для разрывных Марковских процессов вопрос практически не освещен, хотя эти процессы широко используются при анализе и синтезе систем управления и радиосистем.

Рассматривается однородный Марковский процесс $\xi(t)$ с состояниями $1, \ldots, N$ и непрерывным временем, определяемый плотностями выхода $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ и условными вероятностями P_{ij} перехода из i в j. Время пребывания η_i в состоянии i подчиняется показательному закону с параметром λ_i. Моменты дискретизации обозначим $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots$. Пусть в момент t_n $\xi(t_n) = i$. Необходимо найти временной интервал T_i, определяющий следующий момент дискретизации $t_{n+1} = t_n + T_i$ так, чтобы выполнялись условия: 1) **условие на точность**: при восстановлении, если $\xi(t_{n+1}) = j$, $j \neq i$, дисперсия $D\hat{\tau}_{ij}$ оценки $\hat{\tau}_{ij}$ момента перехода τ_{ij} должна быть не больше заданной величины σ^2 (при любых i и j); 2) **условие на пропуск:** вероятность пропуска состояния на интервале $(t_n, t_n + T_i)$ должна быть не больше заданной величины γ (при любых i и j):

Найдено условное распределение для момента перехода τ_{ij} при условии $\{\xi(t_n) = i, \xi(t_n + T_i) = j\}$; оно оказывается усечённым на $[0, T_i]$ показательным с параметром $(\lambda_i - \lambda_j)$. Оценкой $\hat{\tau}_{ij}$ является соответствующее математическое ожидание:

$$\hat{\tau}_{ij} = \mathrm{M}\{\tau_{ij} \mid i, j\} = \begin{cases} \left[1 - \mu_{ij} T_i \big/ \left(e^{\mu_{ij} T_i} - 1\right)\right] \mu_{ij}^{-1}, & \mu_{ij} \neq 0, \\ T_i / 2, & \mu_{ij} = 0, \end{cases} \qquad \mu_{ij} \equiv \lambda_i - \lambda_j.$$

Интервал $T \equiv T_{i\sigma}$ из условия на точность находится из уравнения:

$$\max_{j, j \neq i, P_{ij} \neq 0} D\hat{\tau}_{ij} = \sigma^2.$$

Интервал $T \equiv T_{i\gamma}$ из условия на пропуск находится из уравнения:

$$\max_{j, j \neq i, P_{ij} \neq 0} P\{\eta_i + \eta_j < T\} \equiv P\{\alpha(\eta_i + \eta_{j*}) < \alpha T\} \equiv F_{\alpha\Sigma}(\alpha T \cdot) = \gamma,$$

где j^* – состояние, на котором достигается максимум; функция $F_{\alpha\Sigma}(\cdot)$ распределения суммы $\alpha(\eta_i + \eta_{j*})$, зависящая от двух параметров λ_I и λ_{j*}, сведена к однопараметрическому семейству заменой $\alpha = \max(\lambda_i, \lambda_{j*})$, $\beta = \min(\lambda_i, \lambda_{j*})$, $k = \beta / \alpha$, $0 < k \leq 1$.

$$F_{\alpha\Sigma}(T) = \begin{cases} 1 - \left(e^{-kT} \big/ k - e^{-kT}\right) k / (1-k), & \text{если } k \neq 1, \\ 1 - (1+T) e^{-T}, & \text{если } k = 1. \end{cases}$$

Интервал дискретизации $T_i = \min(T_{i\sigma}, T_{i\sigma})$. Приводится иллюстрирующий пример.