

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ МЕТОДЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ИНВАРИАНТНЫХ КОМПАКТОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Канатников А.Н., Крищенко А.П.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Россия, 105005, г. Москва, 2-я Бауманская, 5
Институт системного анализа РАН
Россия, 117312, г. Москва, просп. 60-летия Октября, 9
Тел.: (499) 263-67-50, E-mail: apmath@bmstu.ru

Обсуждается так называемый функциональный метод локализации инвариантных компактных множеств непрерывных динамических систем [1, 2].

Пусть непрерывная динамическая система задана системой уравнений $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольную гладкую функцию φ , определенную в \mathbb{R}^n . Пусть $S_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{\varphi}(x) = 0\}$, где $\dot{\varphi}(x) = \text{grad } \varphi(x) \cdot f(x)$ — производная функции φ в силу системы. Положим $\varphi_{\text{inf}} = \inf_{x \in S_\varphi} \varphi(x)$, $\varphi_{\text{sup}} = \sup_{x \in S_\varphi} \varphi(x)$. Тогда все инвариантные компактные множества рассматриваемой динамической системы содержатся в множестве $\Omega_\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{\text{inf}} \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\text{sup}}\}$ [2].

Описанный метод распространяется на задачи локализации положительно и отрицательно инвариантных компактных множеств непрерывных динамических систем. Под положительно (отрицательно) инвариантным множеством мы понимаем любое множество, которое вместе с каждой своей точкой содержит и всю положительную (отрицательную) полутраекторию, начинающуюся в этой точке.

Пусть $S_\varphi^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{\varphi}(x) \geq 0\}$, $S_\varphi^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{\varphi}(x) \leq 0\}$. Положим

$$\varphi_{\text{inf}}^+ = \inf_{x \in S_\varphi^+} \varphi(x), \quad \varphi_{\text{sup}}^+ = \sup_{x \in S_\varphi^+} \varphi(x), \quad \varphi_{\text{inf}}^- = \inf_{x \in S_\varphi^-} \varphi(x), \quad \varphi_{\text{sup}}^- = \sup_{x \in S_\varphi^-} \varphi(x).$$

Тогда любое положительно инвариантное компактное множество содержится в множестве $\Omega_\varphi^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{\text{inf}}^+ \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\text{sup}}^+\}$, а любое отрицательно инвариантное компактное множество содержится в множестве $\Omega_\varphi^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{\text{inf}}^- \leq \varphi(x) \leq \varphi_{\text{sup}}^-\}$.

Решение задач поиска экстремумов, как правило, связано со сложными аналитическими вычислениями, для выполнения которых можно применять системы компьютерной алгебры. В некоторых случаях полезны и методы нелинейного программирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН №2 “Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация”, а также РФФИ (проект №09-07-00468).

Литература.

1. Крищенко А. П. Области существования циклов // Доклады АН СССР, 1997. – Т. 353, № 1. – С. 17–19.
2. Крищенко А. П. Локализация инвариантных компактов динамических систем // Дифференциальные уравнения, 2005. – Т. 41, № 12. – С. 1597 – 1604.