ЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ПАРЫ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ И СВЯЗЫВАЮЩИЕ ЭТИ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Казаков О.А.

Московский Государственный Технологический Университет «СТАНКИН», Россия, 127055, Москва, Вадковкий пер., д.3а, тел. 7(499)9729520, E-mail: lsoef@mail.ru

В работе рассматривается условия существования мультиоператорных уравнений

$$F\mathbf{y} = G\mathbf{u}, \qquad (1)$$

связывающих, в общем случае, M-мерные вектор-функций $\mathbf{u}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^M$, $\mathbf{y}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^M$ ($\mathbf{u}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^M$, $\mathbf{y}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^M$), принадлежащие линейному, евклидовому (унитарному) пространству L над полем P. Здесь $F = \sum_{i=0}^{K-1} f^i A_i \in \Omega$, $G = \sum_{i=0}^{N-1} g^i A_i \in \Omega$ — мультиоператоры; $g^i \in P$, $f^i \in P$; операторы A_i: $L \to L$ — элементы мультипликативной циклической группы Ω с одним или несколькими образующими элементами (например, операторы дифференцирования по каждому из n аргументов). Полагается, что каждая из систем векторов (вектор-функций) $A_i\mathbf{u}$, $i = \overline{0,\ N-1}$ и $A_i\mathbf{y}$, $i = \overline{0,\ K-1}$ линейно независима. Для электромагнитных систем уравнения (1) имеют смысл обобщенного закона Ома в сосредоточенных или распределенных параметрах.

Вводится обобщающее равенство Парсеваля понятие замкнутой системы билинейных форм — матрицы $\mathbf{P}$, элементами которой являются скалярные произведения $(\mathbf{P})_{ij} = \langle A_{i-1}\mathbf{u}, A_{j-1}\mathbf{y}\rangle$. Доказывается что, если выполняются условия замыкания

$$\det(\mathbf{G}_Y - \mathbf{P}^*\mathbf{G}_U^{-1}\mathbf{P}) = 0,\ \det(\mathbf{G}_U - \mathbf{P}\mathbf{G}_Y^{-1}\mathbf{P}^*) = 0,$$

то существует линейное пространство эквивалентных мультиоператорных уравнений (1), причем его размерность равна дефекту матриц

$$\operatorname{def}(\mathbf{G}_Y - \mathbf{P}^*\mathbf{G}_U^{-1}\mathbf{P}) = \operatorname{def}(\mathbf{G}_U - \mathbf{P}\mathbf{G}_Y^{-1}\mathbf{P}^*),$$

где $\mathbf{G}_U$, $\mathbf{G}_Y$ — матрицы Грама (с элементами $(\mathbf{G}_U)_{ij} = \langle A_{i-1}\mathbf{u}, A_{j-1}\mathbf{u}\rangle$ и $(\mathbf{G}_Y)_{ij} = \langle A_{i-1}\mathbf{y}, A_{j-1}\mathbf{y}\rangle$) систем векторов (вектор-функций) $A_i\mathbf{u}$, $i = \overline{0,\ N-1}$ и $A_i\mathbf{y}$, $i = \overline{0,\ K-1}$; * — символ транспонирования (сопряжения) матриц.

Рассматриваются алгебраические свойства матрицы $\mathbf{P}$, и их связь со свойствами линейного пространства эквивалентных мультиоператорных уравнений в общем случае и для вектор-функций $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$, являющихся конечными непрерывными аппроксимациями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-07-00213а).

.