ОЦЕНКА МОДУЛЯ АНАЛОГА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ Г. ВЕЙЛЯ В КОЛЬЦЕ ГАУССОВЫХ ЧИСЕЛ

Сорокин П.Н.

НИИ Системных Исследований РАН,
Россия, 117218, Москва, Нахимовский пр-т, д. 36, к. 1,
Тел.: (495)4874803, E-mail: s_p_n_1974@bk.ru

Пусть $Z[i]=\{z\in C \mid z=x+iy, x\in Z, y\in Z\}$ – кольцо гауссовых чисел, $Nz=|z|^2$ – мультипликативная норма в этом кольце.

Рассмотрим следующий аналог тригонометрической суммы Г. Вейля [1]

$$S(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)=\sum_{N\lambda<P} e^{\pi i Sp(f(\lambda))}, \tag{1}$$

где $f(\lambda)=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_1\lambda$, $\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1\in C$, $\lambda\in Z[i]$, $Sp(\varsigma)=2\operatorname{Re}(\varsigma)$ для любого комплексного числа ς.

Каждому числу $s=n,\ldots,2$ поставим в соответствие число $\tau_s=P^{(s-0,5)/2}$, а коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ для $s=n,\ldots,2$ представим в следующем виде

$$\alpha_s=\left(\frac{\alpha_s^R}{q_s^R}+\frac{\theta_s^R}{q_s^R\tau_s}\right)+i\left(\frac{\alpha_s^I}{q_s^I}+\frac{\theta_s^I}{q_s^I\tau_s}\right),$$

где $(\alpha_s^R,q_s^R)=1$, $(\alpha_s^I,q_s^I)=1$, $0<q_s^R\le\tau_s$, $0<q_s^I\le\tau_s$, $0\le\theta_s^R\le1$, $0\le\theta_s^I\le1$. Символами Q_0^R и Q_0^I обозначим наименьшие общие кратные чисел $q_n^R,\ldots,q_2^R$ и $q_n^I,\ldots,q_2^I$ соответственно.

Теорема. Пусть $n\ge5$, $P\ge n^{n^2}$, $Q_0^R>P^{0,25-0,2\nu}$, $Q_0^I>P^{0,25-0,2\nu}$, $\nu=\dfrac{1}{n}$, а также

$$\rho^{-1}=8n^2(\ln n+0,5\ln\ln n+0,75).$$

Тогда для аналога тригонометрической суммы (1) имеем

$$|S(\alpha_n,\ldots,\alpha_1)|<c(n)P^{1-\frac{\rho}{2}},\text{ где } c(n)=2^{4n+5}n^{2n+12}.$$

Для доказательства утверждения теоремы используются диофантово неравенство И.М.Виноградова в кольце гауссовых чисел и оценка кратности пересечения окрестностей гауссовых чисел [2].

Литература

1. *Виноградов И.М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел. - Наука, 1971.
2. *Сорокин П.Н.* Диофантово неравенство И.М. Виноградова в кольце гауссовых чисел // *"Математика. Образование. Культура", Сборник трудов 4-ой международной конференции,* ч. 1, математика и ее приложения, Тольятти, 2009. Стр. 7-11.