ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПЕРЕД ПРОИЗВОДНЫМИ И РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Мазуров М.Е.

Московский государственный университет экономики, статистики, информатики
Россия, 119501, г. Москва, ул. Нежинская, 7; E–mail: mazurov37@mail.ru

Изучена устойчивость периодических решений неавтономных систем нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром перед производными

$$\varepsilon \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\beta}_1(\mathrm{t})),\ \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{x},\mathbf{y},\boldsymbol{\beta}_2(\mathrm{t})) \quad , \qquad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1,...,x_k)$, $\mathbf{y} = (y_1,...,y_l)$, $\mathbf{f} = (f_1,...,f_k)$, $\mathbf{g} = (g_1,...,g_l)$, $k + l = n$, $\boldsymbol{\beta}_1(\mathrm{t}) = (\beta_1,...,\beta_k)$, $\boldsymbol{\beta}_2(\mathrm{t}) = (\beta_{k+1},...,\beta_n)$ - периодическое синхронизирующее внешнее воздействие. Найдены новые виды периодических решений уравнения (1) для заданных соотношений m/n частот внешнего синхронизирующего воздействия и релаксационного колебания.

Для асимптотической устойчивости периодических решений автономной системы (1) при $\boldsymbol{\beta}_1(t),\ \boldsymbol{\beta}_2(t) \equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы для уравнений в приращениях мультипликаторы $\mu_i\ (i = 1,...,n)$, являющиеся собственными числами матрицы монодромии, удовлетворяли условию $\mu_i < 1$. При $\boldsymbol{\beta}_1(t),\ \boldsymbol{\beta}_2(t) \neq 0$ существуют почти-периодические решения, а в случае наступления синхронизации - периодические решения уравнения (1). Для исследования орбитальной устойчивости периодических решений используется вводимая специальным образом пороговая функция $U = p(t)$ и метод функций последования Пуанкаре. Орбитальная устойчивость периодических решений (1) имеет место, если в сечении Пуанкаре $t = kT_c$ $(k = 1,2,...)$ последовательность значений функции последования Пуанкаре является сходящейся. Пороговая функция $U = p(t)$ определяется следующим образом: <u>Определение.</u> Пусть $p(t)$ $t \in [0,T_0]$ непрерывная монотонная функция. Пусть внешнее периодическое воздействие - импульсная функция $\beta(t) = U_0$ $t \in [t_1,t_2]$; $\beta(t) = 0$, $t \in [0,t_1) \vee t \in (t_2,T_0]$. Если возбуждение внеочередного релаксационного колебания происходит при условии $\beta(t) \geq p(t)$ и не происходит при $\beta(t) < p(t)$, то функция $p(t)$ $t \in [0,T_0]$ называется пороговой.

<u>Теорема </u>(об устойчивости периодических решений при синхронизации). Пусть автономная система (1) при $\boldsymbol{\beta}_1(t),\ \boldsymbol{\beta}_2(t) \equiv 0$ имеет устойчивое периодическое решение $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u}(t + T_0) = \mathbf{u}(t)$. Пусть для любых $\beta(t - \tau)$ $\tau \in [0,T_0]$, $|U_0| < M$ существует единственное ограниченное непериодическое решение уравнения (1) $\mathbf{v}(t)$ $t \in [0,T_0]$. Тогда периодические решения (1) с периодом $T = (m/n)T_c$ устойчивы при условии $|mT_c - nT_0| < \varepsilon,\ \varepsilon = p^{-1}(U_0)$.