ДЕМОНСТРАЦИЯ СВОЙСТВ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА НА ПРИМЕРЕ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Белянков А.Я.

Учреждение Российской академии наук
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
Россия, 119333, Москва, ул. Вавилова, 40,
Тел.: (499) 135-42-50, E-mail: belyankov@ccas.ru

Пусть функция $f : R \to R$ достаточно гладкая, $f(x_*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$, а приближения $x_0, x_1, x_2, \ldots$ последовательно порождаются численным методом решения уравнения $f(x) = 0$. Приведем хорошо известные асимптотики сходимости, ограничиваясь для определенности тремя методами из монографии [1], а именно методом Ньютона, методом секущих и методом секущих с рекуррентностью вида $x_{k+1} = F(x_k, x_{k-1})$:

$$(x_{k+1} =)\ x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_* + (x_k - x_*)^2(\kappa + o(1)), \tag{1}$$

$$(x_{k+1} =)\ \frac{af(x_k) - x_k f(a)}{f(x_k) - f(a)} = x_* + (x_k - x_*)(q + o(1)), \tag{2}$$

$$(x_{k+1} =)\ \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = x_* + (x_{k-1} - x_*)(x_k - x_*)(\kappa + o(1)). \tag{3}$$

Для дробно-линейных функций $\varphi_A(x) = (a_{11}x + a_{12})/(a_{21}x + a_{22})$, $\det(A) \neq 0$, в докладе устанавливается следующее. Если $f = \varphi_A$, то формулы (1–3) выполняются точно, т.е. можно отбросить $o(1)$; надлежащие значения κ, q суть $\kappa = f''(x_*)/2f'(x_*)$, $q = \kappa(a - x_*)$. Эти свойства характерны именно для дробно-линейных функций: если в любой из формул (1–3) отбросить $o(1)$ и рассмотреть ее как функциональное уравнение относительно f с независимой переменной x_k (формулы (1–2)) или с парой переменных x_{k-1}, x_k (формула (3)), то получим, что f дробно-линейна.

Отметим также, что процесс решения уравнения $x = \varphi(x)$ методом простой итерации, т.е. построением последовательности x_0, $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(\varphi(x_0)), \ldots$ вполне «прозрачен» в случае дробно-линейной функции $\varphi = \varphi_A$, так как $\varphi_A(\varphi_A(x)) = \varphi_{A^2}(x)$, $\varphi_A(\varphi_A(\varphi_A(x))) = \varphi_{A^3}(x)$ и т.д., а степени A легко вычисляются: $A^k = V\Lambda^k V^{-1}$, если $A = V\Lambda V^{-1}$ есть каноническое разложение 2×2-матрицы A.

Литература

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. - М.: Наука, 1975. 632 стр.