

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ АЛГОРИТМ КАЧМАЖА В ЗАДАЧАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ТОМОГРАФИИ

Иванов А.А.

Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королева,
кафедра прикладной математики,
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе-34, SsauiIvanov@gmail.com

Рассмотрим стандартную задачу регуляризации А.Н. Тихонова

$$\min_{u \in R^n} \left\{ \|Au - f\|^2 + \alpha \|u\|^2 \right\}, \quad (1)$$

где $A \in R^{m \times n}$, $f \in R^m$, а параметр регуляризации $\alpha > 0$. Для решения задачи (1) в работе [1] предлагается новый подход, основанный на методе расширенных регуляризованных нормальных уравнений. Суть последнего состоит в записи нормальной системы уравнений $(A^T A + \alpha I_n)u = A^T f$ в виде расширенной системы

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} I_m & A \\ A^T & -\sqrt{\alpha} I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \Leftrightarrow \tilde{A}_\alpha z = \tilde{f}, u_* = (A^T A + \alpha I_n)^{-1} A^T f, \quad (2)$$
$$y_* = \alpha^{-1/2} \cdot r_*, r_* = f - Au, z_* = \begin{pmatrix} y_*^T \\ u_*^T \end{pmatrix}.$$

Спектральное число обусловленности регуляризованной расширенной нормальной системы (2) существенно меньше числа обусловленности классической системы регуляризованной нормальной системы и равно [1] $k_2(\tilde{A}_\alpha) = \sqrt{k_2(A^T A + \alpha I_n)}$.

В работе [2] на основе решения системы (2) предлагается новый проекционный регуляризирующий алгоритм

$$\theta_k = \theta_{k-1} - \rho_{k-1} \begin{pmatrix} a_{j(k)} \\ -e_{j(k)} \end{pmatrix}, \rho_{k-1} = \left(\|a_{j(k)}\|^2 + \alpha \right)^{-1} \left(a_{j(k)}^T, -\alpha e_{j(k)}^T \right) \theta_{k-1}, \quad (3)$$
$$A = (a_1, \dots, a_n), k = 1, 2, \dots, j(k) = (k-1) \bmod (n) + 1,$$

где $\theta_k = \begin{pmatrix} r_k^T \\ u_k^T \end{pmatrix}$. Доказано, что алгоритм сходится к решению задачи (1), в случае, если начальные приближения согласованы, то есть $r_0 = f - Au_0$. В докладе представлены результаты применения предлагаемого проекционного метода в задачах томографии. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 10-01-00723-а).

Литература

1. Жданов А.И. Об одном численно устойчивом алгоритме решения систем линейных алгебраических уравнений неполного ранга. - Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки, 2008. №1(16) стр. 149-153.
2. Жданов А.И., Иванов А.А. Проекционный регуляризирующий алгоритм для решения некорректных линейных алгебраических систем большой размерности. - Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки, 2010.