Свойства симметрии уравнений с фрактальной производной

Шаповалов А.В.[1,2], Бронс Р.[1]

[1]Томский Национальный исследовательский государственный университет
[2]Томский Национальный исследовательский политехнический университет

МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕР. ОБРАЗОВАНИЕ.
25 – 30 января 2021 г.

Содержание

Фрактальная и гладкая кривые

- Физические системы с фрактальными свойствами связаны с геометрией фракталов, которая существенно отличается от геометрии «обычных» непрерывных систем.
- Различия между непрерывными и фрактальными объектами видны из сравнения непрерывной и фрактальной кривых. Непрерывная, гладкая кривая на малых масштабах приближается к отрезку прямой. Фрактальная кривая на любых, даже сколь угодно малых масштабах, не сводится к отрезку прямой, а остается нерегулярной, подобной самой себе на больших масштабах.
- Для фрактальной кривой не определено понятие касательной в смысле геометрии гладких многообразий, так как фрактальные кривые в общем случае недифференцируемы.

Компьютерное моделирование на фрактальных множествах

- Различия геометрий фрактальных и непрерывных систем делает невозможным прямой перенос моделей непрерывных систем на фрактальные системы, поскольку к фрактальным объектам неприменима «обычная» теория дифференциальных и интегральных уравнений.
- Поэтому в исследованиях фрактальных систем нашли широкое применение компьютерные методы, которые, при всех своих достоинствах, оставляют в стороне аналитические методы, что ставит проблему поиска новых подходов к развитию методов анализа на фрактальных структурах.

Дробное исчисление.

- Использование дробных производных и интегралов для исследования особенностей аномальной диффузии, аномального транспорта, в исследованиях стохастических процессов различной природы и др. (1987'Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.; 1994'Metzler R., Glockle W.G., Nonnenmacher T.F.; 1999' Metzler R., Barkai E., Kafter J.;2003' Учайкин В.В. et.al).
- Однако дробные производные представляют собой нелокальные операторы, определенные на гладких функциях и в ряде случаев не подходят для прямого моделирования фракталов, в частности, для операций с фрактальными функциями, отражающими локальные особенности фракталов.

Анализ на фрактальных кривых

- В литературе предложен аналитический подход, представляющий теорию «исчисления на фракталах», в рамках которого определяются базовые понятия анализа: предел, непрерывность, производные и интегралы: 2009'Parvate A., Gangal A.D.; 2011' Parvate, A., Gangal A.D.; 2018' Golmankhaneh A.R., Fernandez A., A., Golmankhaneh, A.K., Baleanu D.
- В данной работе используется теория т.н. F^{α}– исчисления (F^{α}– анализа) на одномерных канторовых множествах (см. 2009'Parvate A., Gangal A.D. ; 2011' Parvate, A., Gangal A.D. и цитированную там литературу).
- В рамках этой теории вводятся функции от фрактальных переменных, прямые аналоги дифференциальных и интегральных уравнений, в которых вместо обычных производных используются их фрактальные аналоги.

α-масса

- Исходной конструкцией F^{α}– анализа является α – масса, или массовая функция фрактального множества F.
- Вначале вводится флаговая функция $\theta(F)(I)$ множества F и замкнутого интервала $I=[a,b]\subset R^1$, $a<b$, $\theta(F)(I)=1$, если $F\cap I\neq\emptyset$, $\theta(F)(I)=0$, если $F\cap I=\emptyset$.
- Затем для некоторого разбиения $P_{[a,b]}=\{a=x_0,\ldots,x_n=b\}$ интервала I , множества F и параметра $0<\alpha<1$ определяется величина $\sigma[F,P]=\sum_{i=0}^{n-1}\Gamma^{-1}(\alpha+1)(x_{i+1-x_i})\theta(F,[x_i,x_{i+1}])$, $\Gamma(x)$ есть гамма функция Эйлера. В случае $a=b$ полагается $\sigma[F,P]=0$.
- Эта величина позволяет определить гранулярную (крупнозернистую) массовую функцию (coarse-grained mass function) следующим образом:

$$\gamma_\delta^\alpha(F,a,b)=\inf_{\{P_{[a,b]}:|P|\leq\delta\}}\sigma[F,P],\ |P|=\max_{0\leq i\leq n-1}(x_{i+1}-x_i), \qquad (2.1)$$

α-масса

- Здесь inf берется по всем δ – разбиениям ($|P| \leq \delta$) отрезка $[a, b]$.
- Массовая функция $\gamma^{\alpha}(F, a, b)$ множества F определяется как предел

$$\gamma^{\alpha}(F, a, b) = \lim_{\delta \to 0} \gamma_{\delta}^{\alpha}(F, a, b) \tag{2.2}$$

- Значение параметра α, при котором массовая функция $\gamma^{\alpha}(F, a, b)$ вида (2.2) конечна, определяет γ – размерность множества F.

$$\begin{aligned} \dim_{\gamma}(F \cap [a, b]) &= \inf\{\alpha : \gamma(F, a, b) = 0\} \\ &= \sup\{\alpha : \gamma^{\alpha}(F, a, b) = +\infty\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

- Например, для канторова множества C^{ζ} (см. 2019' Golmankhaneh A.R., Tunc C.) , $\dim_{\gamma}(C^{\zeta} \cap [a, b]) = \alpha$, при котором $\gamma^{\alpha}(F, a, b)$ конечна.

  Для срединного триадного канторова множества $C^{1/3}$ имеем $\alpha = \dim_{\gamma}\left(C^{1/3} \cap [0, 1]\right) = \log 2/\log 3$.

Интегральная ступенчатая (лестничная) функция

- Базовым понятием F^{α} – анализа является интегральная ступенчатая (лестничная) функция (integral staircase function), $S_F^{\alpha}(x)$, которая для фрактала F дается выражением

$$S_F^{\alpha}(x) = \begin{cases} \gamma^{\alpha}(F, a_0, x) & if \quad x \geq a_0 \\ -\gamma^{\alpha}(F, x, a_0) & otherwise. \end{cases} \tag{2.4}$$

- Интегральная ступенчатая функция $S_F^{\alpha}(x)$ используется в роли аргумента другой функции на фрактальном множестве F .
- Хотя такая функция может быть гладкой функцией непрерывной вещественной переменной, но если ее непрерывный аргумент заменить на $S_F^{\alpha}(x)$ вида (3), то она будет содержать информацию о фрактале F.
- В данной работе используются в основном гладкие функции, зависящие от ступенчатой функции $S_F^{\alpha}(x)$.

F-предел и F^α-производная.

- F -предел.

  Для некоторой функции $f : R^1 \to R^1$ и $x \in F \subset R^1$ число l называется пределом функции f **по точкам множества** F **, или** F **-пределом** f **при** $y \to x$**,** если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(y) - l| < \varepsilon$, когда $y \in F$, $|y - x| < \delta$. Такое l, если оно существует, обозначается как

$$l = F - \lim_{y \to x} f(y). \tag{2.5}$$

- Подчеркнем, что это определение не включает значения функции в точках y , если $y \notin F$, и F -предел не определен в точках $x \notin F$.
- F^α -производная.
- Для фрактального множества F и функции f, F^α – производная определяется выражением

$$(D_F^\alpha f)(x) = \begin{cases} F - \lim\limits_{y \to x} \dfrac{f(y) - f(x)}{S_F^\alpha(y) - S_F^\alpha(x)} & \text{if} \quad x \in F, \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \tag{2.6}$$

- Наряду с обозначением $(D_F^\alpha f)(x)$ используется также обозначение $D_F^\alpha f(x)$. Производная D_F^α обладает свойством линейности, справедлив аналог формулы Лейбница, а производная от интегральной ступенчатой функции равна

$$(D_F^\alpha S_F^\alpha)(x) = \chi_F(x), \tag{2.7}$$

где $\chi_F(x)$ – характеристическая функция множества F.

F-интеграл.

- F -интеграл вводится по аналогии с интегралом Римана – Стилтьеса для класса функций $B(F)$ ограниченных на F. Для функции $f \in B(F)$ и интервала I обозначим

$$M[f,F,I] = \sup_{x\in F\cap I} f(x), \text{если} F\cap I \neq \emptyset, m[f,F,I] = \inf_{x\in F\cap I} f(x), \text{если} F\cap I \neq \emptyset,$$

$$M[f,F,I] = 0, \text{если} F\cap I = \emptyset, m[f,F,I] = 0, \text{если} F\cap I = \emptyset.$$

- Для интегральной ступенчатой функций $S_F^{\alpha}(x)$ конечной на замкнутом интервале $I=[a,b]$, $x\in I$, и разбиения $P_{[a,b]}$ вводятся верхняя и нижняя суммы

$$U^{\alpha}[f,F,P] = \sum_{i=0}^{n-1} M[f,F,[x_i,x_{i+1}]](S_F^{\alpha}(x_{i+1}) - S_F^{\alpha}(x_i)), \qquad (2.8)$$

и

$$L^{\alpha}[f,F,P] = \sum_{i=0}^{n-1} m[f,F,[x_i,x_{i+1}]](S_F^{\alpha}(x_{i+1}) - S_F^{\alpha}(x_i)). \qquad (2.9)$$

F-интеграл.

- Соответственно, нижний и верхний интегралы

$$\underline{\int_a^b} f(x) d_F^{\alpha} x = \sup_{P_{[a,b]}} L^{\alpha}[f, F, P], \tag{2.10}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x) d_F^{\alpha} x = \inf_{P_{[a,b]}} U^{\alpha}[f, F, P]. \tag{2.11}$$

Оба супремум и инфимум берутся по всем разбиениям P отрезка $[a, b]$. Символ d_F^{α} есть просто обозначение. Очевидно, что

$$\underline{\int_a^b} f(x) d_F^{\alpha} x \leq \overline{\int_a^b} f(x) d_F^{\alpha} x. \tag{2.12}$$

В случае, когда оба интеграла совпадают, функция называется – интегрируемой, а значение верхнего и нижнего интеграла называется – интегралом и обозначается

$$\int_a^b f(x) d_F^{\alpha} x.$$

Уравнение диффузии с F^α- производной по времени.

- Основная цель работы – применить основные понятия группового анализа дифференциальных уравнений к уравнениям с фрактальной производной (F^α-производной), следуя, в основном, Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. – N. Y.: Springer, 1986. и, частично, 2019' Golmankhaneh A.R., Tunc C.
- Уравнение диффузии для плотности u, зависящей от непрерывной пространственной переменной $x \in R^1$ и временной переменной t, пробегающей фрактальное множество F.
- Следуя 2009'Parvate A., Gangal A.D.; 2011'Parvate, A., Gangal A.D., фрактальная независимая переменная вводится в функцию плотности в виде интегральной ступенчатой функции $S_F^\alpha(t)$, так что .

$$u = u(S_F^\alpha(t), x).$$

- В соответствии с 2009'Parvate A., Gangal A.D.; 2011' Parvate, A., Gangal A.D., уравнение диффузии с F^α- производной по времени, запишем в виде

$$D_{F,t}^\alpha(u(S_F^\alpha(t), x)) = \chi_F(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(S_F^\alpha(t), x)). \qquad (3.1)$$

Продолжение преобразований независимых и зависимых переменных.

- Чтобы получить условия инвариантности дифференциальных уравнений под действием группы Ли преобразований независимых и зависимых переменных, необходимо продолжить пространство независимых и зависимых переменных, включив в расширенное пространство дополнительные переменные, которые будут представлять производные от зависимых переменных (Теория продолжения Л.В. Овсянникова, здесь мы придерживаемся обозначений Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations. – N. Y.: Springer, 1986.)
- Продолжение второго порядка функции $u(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x))$ в (1+1)-мерном пространстве независимых переменных $F \times F \subset R^2$. Обозначим первые фрактальные F^α– производные как

$$u^\alpha_{(1)} = D^\alpha_{F,t} u(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x)), \quad u^\alpha_1 = D^\alpha_{F,x} u(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x)). \qquad (4.1)$$

- Обозначим вторые фрактальные производные:

$$u^{\alpha}_{(11)} = D^{\alpha}_{F,t}\big(D^{\alpha}_{F,t}u(S^{\alpha}_F(t), S^{\alpha}_F(x))\big), \quad u^{\alpha}_{11} = D^{\alpha}_{F,x}\big(D^{\alpha}_{F,x}u(S^{\alpha}_F(t), S^{\alpha}_F(x))\big),$$
$$u^{\alpha}_{1(1)} = D^{\alpha}_{F,x}\big(D^{\alpha}_{F,t}u(S^{\alpha}_F(t), S^{\alpha}_F(x))\big) \ \Big(= u^{\alpha}_{(1)1} = D^{\alpha}_{F,t}\big(D^{\alpha}_{F,x}u(S^{\alpha}_F(t), S^{\alpha}_F(x))\big)\Big). \tag{4.2}$$

- Обозначим второе продолжение функции $u(S^{\alpha}_F(t), S^{\alpha}_F(x))$:

$$u^{\alpha(2)} = pr^{\alpha(2)}u(S^{\alpha}_F(t), S^{\alpha}_F(x)) = \big(u, u^{\alpha}_{(1)}, u^{\alpha}_{1}, u^{\alpha}_{(11)}, u^{\alpha}_{1(1)}, u^{\alpha}_{(11)}\big). \tag{4.3}$$

- Действие продолженного преобразования $pr^{\alpha(2)}g$ на точку $(S^{\alpha}_F(t_0), S^{\alpha}_F(x_0), u^{\alpha(2)}_0)$ определим посредством вычисления производных преобразованной функции $\tilde{u}$ в точке $(S^{\alpha}_F(\tilde{t}_0), S^{\alpha}_F(\tilde{x}_0))$. Обозначения:

$$pr^{\alpha(2)}g \cdot \big(S^{\alpha}_F(t_0), S^{\alpha}_F(x_0), u^{\alpha(2)}_0\big) = \big(S^{\alpha}_F(\tilde{t}_0), S^{\alpha}_F(\tilde{x}_0), \tilde{u}^{\alpha(2)}_0\big).$$
$$\tilde{u}^{\alpha(2)} = pr^{\alpha(2)}(g \cdot u)(S^{\alpha}_F(\tilde{t}_0), S^{\alpha}_F(\tilde{x}_0)). \tag{4.4}$$

  Очевидно, k-продолжение действия группы записывается как

$$pr^{\alpha(k)}g \cdot \big(S^{\alpha}_F(t_0), S^{\alpha}_F(x_0), u^{\alpha(k)}_0\big) = \big(S^{\alpha}_F(\tilde{t}_0), S^{\alpha}_F(\tilde{x}_0), \tilde{u}^{\alpha(k)}_0\big).$$
$$\tilde{u}^{\alpha(k)} = pr^{\alpha(k)}(g \cdot u)(S^{\alpha}_F(\tilde{t}_0), S^{\alpha}_F(\tilde{x}_0)). \tag{4.5}$$

- Чтобы определить действие $pr^{\alpha(k)}g$ на точку $(S_F^{\alpha}(t_0), S_F^{\alpha}(x_0), u_0^{\alpha(k)})$, выбираем функцию, производные которой имеют значения $u_0^{\alpha(k)}$, преобразуем эту функцию по формуле аналогичной

$$g \cdot f = [w_g \circ (\mathbb{I} \times f)] \circ [v_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}. \tag{4.6}$$

- Действие продолженного преобразования $pr^{\alpha(2)}g$ на точку $(S_F^{\alpha}(t_0), S_F^{\alpha}(x_0), u_0^{\alpha(2)})$ определим посредством вычисления производных преобразованной функции $\tilde{u}$ в точке $(S_F^{\alpha}(\tilde{t}_0), S_F^{\alpha}(\tilde{x}_0))$. Обозначения:

$$pr^{\alpha(2)}g \cdot \left(S_F^{\alpha}(t_0), S_F^{\alpha}(x_0), u_0^{\alpha(2)}\right) = \left(S_F^{\alpha}(\tilde{t}_0), S_F^{\alpha}(\tilde{x}_0), \tilde{u}_0^{\alpha(2)}\right).$$

$$\tilde{u}^{\alpha(2)} = pr^{\alpha(2)}(g \cdot u)(S_F^{\alpha}(\tilde{t}_0), S_F^{\alpha}(\tilde{x}_0)). \tag{4.7}$$

- Аналог продолженного векторного поля определим компонентами

$$\tau(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u) = \frac{d}{d\varepsilon} v(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u, \varepsilon)\big|_{\varepsilon\to 0},$$
$$\xi(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u) = \frac{d}{d\varepsilon} w(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u, \varepsilon)\big|_{\varepsilon\to 0},$$
$$\eta(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u) = \frac{d}{d\varepsilon} h(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u, \varepsilon)\big|_{\varepsilon\to 0}. \tag{4.8}$$

- Введем упрощенное обозначение точки через $\mathbf{S}^\alpha = (S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u)$.
- Аналог продолженного векторного поля на обозначим через

$$\mathbf{v}|_{\mathbf{S}^\alpha} = \Big(\tau(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u), \xi(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u), \eta(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u)\Big). \tag{4.9}$$

- С помощью продолженного векторного поля можно записать условие инфинитезимальной инвариантности фрактального аналога дифференциального уравнения. Запишем уравнение второго порядка с F^α – производными в (1+1)-мерном случае в следующем виде:

$$\Delta(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u^{\alpha(2)}) = 0. \tag{4.10}$$

- Обозначим множество решений уравнения (4.10) через

$$P_\Delta^\alpha = \{(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u^{\alpha(2)}) : \Delta(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u^{\alpha(2)}) = 0\}. \tag{4.11}$$

- Пусть G есть группа преобразований независимых и зависимых переменных, продолженное действие которой оставляет инвариантным множество P_Δ^α уравнения (4.10), т.е. переводит решение уравнения (4.10) в некоторое его решение. Тогда условие инфинитезимальной инвариантности действия группы записывается виде

$$pr^\alpha(2)v\left[\Delta(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u^{\alpha(2)}) = 0\right] \quad \text{при} \quad \Delta(S_F^\alpha(t), S_F^\alpha(x), u^{\alpha(2)}) = 0. \tag{4.12}$$

Явный вид продолженного векторного поля

- Чтобы записать явный вид продолженного векторного поля и условия инфинитезимальной инвариантности (4.10), введем аналоги операторов полного дифференцирования, которые в рассматриваемом (1+1)-мерном случае можно определить выражениями

$$\mathrm{D}^{\alpha}_{(1)} = D^{\alpha}_{F,t} + u^{\alpha}_{(1)}\frac{\partial}{\partial u} + u^{\alpha}_{(11)}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{(1)}} + \dots$$
$$\mathrm{D}^{\alpha}_{1} = D^{\alpha}_{F,x} + u^{\alpha}_{1}\frac{\partial}{\partial u} + u^{\alpha}_{(1)1}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{(1)}} + u^{\alpha}_{11}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_{1}} \dots \tag{4.13}$$

- С помощью операторов (4.13), запишем явные выражения для продолженных аналогов векторного поля в следующем виде. Первое продолжение:

$$pr^{\alpha(1)}v = (\tau, \xi, \eta, \eta^{\alpha}_{(1)}, \eta^{\alpha}_{1}), \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha}_{(1)} &= \mathrm{D}^{\alpha}_{(1)}(\eta - \tau u^{\alpha}_{(1)} - \xi u^{\alpha}_{1}) + \tau u^{\alpha}_{(11)} + \xi u^{\alpha}_{(1)1}, \\ \eta^{\alpha}_{1} &= \mathrm{D}^{\alpha}_{1}(\eta - \tau u^{\alpha}_{(1)} - \xi u^{\alpha}_{1}) + \tau u^{\alpha}_{(1)1} + \xi u^{\alpha}_{11}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

- Второе продолжение.

$$pr^{\alpha(2)}v = (\tau, \xi, \eta, \eta^{\alpha}_{(1)}, \eta^{\alpha}_{1}, \eta^{\alpha}_{(11)}, \eta^{\alpha}_{(1)1}, \eta^{\alpha}_{11}), \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} \eta^{\alpha}_{(11)} &= \mathrm{D}^{\alpha}_{(1)}\mathrm{D}^{\alpha}_{(1)}(\eta - \tau u^{\alpha}_{(1)} - \xi u^{\alpha}_{1}) + \tau u^{\alpha}_{(111)} + +\xi u^{\alpha}_{(11)1}, \\ \eta^{\alpha}_{(1)1} &= \mathrm{D}^{\alpha}_{(1)}\mathrm{D}^{\alpha}_{1}(\eta - \tau u^{\alpha}_{(1)} - \xi u^{\alpha}_{1}) + \tau u^{\alpha}_{(11)1} + \xi u^{\alpha}_{(1)11}, \\ \eta^{\alpha}_{11} &= \mathrm{D}^{\alpha}_{1}\mathrm{D}^{\alpha}_{1}(\eta - \tau u^{\alpha}_{(1)} - \xi u^{\alpha}_{1}) + \tau u^{\alpha}_{(1)11} + \xi u^{\alpha}_{111}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

- Величина $Q = \eta - \tau u^{\alpha}_{(1)} - \xi u^{\alpha}_{1}$ есть **характеристика векторного поля** (по терминологии 1986'Olver P. Applications of Lie Groups ...), которая позволяет в явном виде записать условия инфинитезимальной инвариантности уравнения относительно продолженной группы и явно вычислить симметрии (характеристики симметрий) исследуемого уравнения.

Лиевские симметрии уравнения диффузии с фрактальной производной

- Запишем уравнение диффузии (3.1):

$$\Delta(S_F^{\alpha}(t), x, u^{\alpha(2)}) = u_{(1)}^{\alpha} - \chi_F(t)u_{11} = 0, \tag{5.1}$$

где $u_{(1)}^{\alpha} = D_{F,t}^{\alpha}u$, $u_{11} = u_{xx}$.

- Условие инфинитезимальной инвариантности (4.12), с учетом вида продолжений (4.15), (4.16), условия $D_{F,t}^{\alpha}(\chi_F(t)) = 0$ и условия (5.1), запишется следующим образом:

$$\eta_{(1)}^{\alpha} - \chi_F(t)\eta_{11}^{\alpha} = 0. \tag{5.2}$$

- Подставим в (5.2) явные выражения из (4.16), из (4.17) и из уравнения (5.1). После вычислений уравнение (5.2) приводится к виду

$$D^{\alpha}_{F,t}\eta - u_1 D^{\alpha}_{F,t}\xi + \chi_F(t)\big[-u_{11}D^{\alpha}_{F,t}\tau - u_1 u_{11}\xi_{,u}\big] =$$
$$= \chi_F(t)\{\eta_{,xx} + u_1(2\eta_{,xu} - \xi_{,xx}) - u_{11}\tau_{,xx} + u_1^2(\eta_{,uu} - 2\xi_{,xu}) - 2u_1u_{11}\tau_{,xu} -$$
$$- u_1^3\xi_{,uu} - u_1^2u_{11}\tau_{,uu} - 2u_{11}\xi_{,x} - 2u_{111}\tau_{,x} - 3u_1u_{11}\xi_{,u} - 2u_1u_{111}\tau_{,u}\}. \quad (5.3)$$

- Уравнение (5.3) является определяющим для функций τ, ξ и η.
- Поскольку эти функции зависят только от $S^{\alpha}_F(t)$, x , u и не зависят от u_1, u_{11}, u_{111}, то, приравняв коэффициенты при соответствующих степенях u_1, u_{11}, u_{111} , после приведения подобных членов, приходим к следующим выражениям для τ, ξ и η:

$$\tau = c_2 + 2c_4S^{\alpha}_F(t) + 4c_6S^{\alpha}_F(t)S^{\alpha}_F(t), \quad (5.4)$$
$$\xi = c_1 + c_4x + 2c_5S^{\alpha}_F(t) + 4c_6xS^{\alpha}_F(t), \quad (5.5)$$
$$\eta = au + b(t,x), \quad (5.6)$$
$$a = -c_6x^2 - c_5x - 2c_6S^{\alpha}_F(t) + c_3, \quad (5.7)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_6$– произвольные константы, функция $b(t,x)$ – есть решение уравнения диффузии (3.1) с F^{α}- производной по времени.

- Функции τ, ξ, η являются компонентами фрактального аналога векторного поля вида (4.9):

$$v = (\tau, \xi, \eta). \tag{5.8}$$

- Подставим выражения (5.4) – (5.7)) в (5.8) и сгруппируем компоненты τ, ξ, η , при одинаковых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_6$. Тогда вектор (5.8) можно представить в виде линейной комбинации следующих векторов:

$$\begin{aligned} &v_1 = (0,1,1) \quad v_2 = (1,0,0) \quad v_3 = (0,0,u) \\ &v_4 = (2S_F^{\alpha}(t), x, 0) \quad v_5 = (0, 2S_F^{\alpha}(t), -xu) \\ &v_6 = (4S_F^{\alpha}(t)S_F^{\alpha}(t), 4xS_F^{\alpha}(t), -(x^2 + 2S_F^{\alpha}(t))u) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Кроме того, имеем

$$v_b = (0, 0, b(t, x)). \tag{5.10}$$

- Векторы (5.9) — (5.10) образуют базис алгебры лиевских симметрий уравнения диффузии с F^{α} - производной по времени (3.1).

  Проинтегрировав систему (4.9), получим однопараметрические группы (с групповым параметром ε) преобразований инвариантности уравнения (3.1):

$$v_1 : S_F^{\alpha}(\tilde{t}) = S_F^{\alpha}(t), \tilde{x} = x + \varepsilon, \tilde{u} = u;$$

$$v_2 : S_F^{\alpha}(\tilde{t}) = S_F^{\alpha}(t) + \varepsilon, \tilde{x} = x, \tilde{u} = u;$$

$$v_3 : S_F^{\alpha}(\tilde{t}) = S_F^{\alpha}(t), \tilde{x} = x, \tilde{u} = ue^{\varepsilon};$$

$$v_4 : S_F^{\alpha}(\tilde{t}) = e^{2\varepsilon} S_F^{\alpha}(t), \tilde{x} = e^{\varepsilon} x, \tilde{u} = u;$$

$$v_5 : S_F^{\alpha}(\tilde{t}) = S_F^{\alpha}(t), \tilde{x} = x + 2\varepsilon S_F^{\alpha}(t), \tilde{u} = ue^{-\varepsilon x - \varepsilon^2 S_F^{\alpha}(t)};$$

$$v_6 : S_F^{\alpha}(\tilde{t}) = \frac{S_F^{\alpha}(t)}{1 - 4\varepsilon S_F^{\alpha}(t)}, \tilde{x} = \frac{x}{1 - 4\varepsilon S_F^{\alpha}(t)},$$

$$\tilde{u} = u\sqrt{1 - 4\varepsilon S_F^{\alpha}(t)} \exp\left[\frac{\varepsilon x^2}{1 - 4\varepsilon S_F^{\alpha}(t)}\right]. \tag{5.11}$$

Заключение

- Свойства симметрии уравнений с фрактальной F^α – производной исследуются в рамках классического группового анализа дифференциальных уравнений. Рассматриваются продолжения преобразований независимых и зависимых переменных в (1+1)-мерном случае с фрактальной переменной в виде ступенчатой функции $S_F^\alpha(t)$, причем преобразования задаются гладкими функциями.
- Из соображений простоты мы ограничились продолжением не выше второго порядка.
- Специфика анализа проявляется при решении определяющих уравнений и в преобразованиях инвариантности (5.11).
- Полученные результаты могут представлять интерес при изучении свойств симметрии более сложных уравнений, например, нелинейных уравнений с фрактальными производными.