ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ФАА ДИ БРУНО НА ВЕКТОРНЫЙ СЛУЧАЙ

Сорокин П.Н.

Россия, 117218, Москва, Нахимовский проспект, д. 36, корп. 1,

ФГУ ФНЦ НИИ Системных Исследований РАН,

s_p_n_1974@bk.ru

28-ая международная конференция

Математика. Компьютер. Образование

25 – 30 января 2021 года

Дифференцирование сложной функции $\mathrm{F}(\mathrm{u}(x))$ приводит к красивой формуле, опубликованной Франческо Фаа-ди-Бруно в середине XIX века. Эта формула является обобщением формулы дифференцирования сложной функции на производные более высоких порядков. Формула Фаа Ди Бруно, как и ее обобщения и модификации, полезны в практике преподавания математического анализа, а также в формировании комбинаторного мышления.

Приведем сначала классическую формулу Фаа Ди Бруно (см. например, в учебнике [1]), для сложной функции $\mathrm{F}(u(x))$, а затем перейдем к ее модификации для сложной функции $\mathrm{F}(u_1(x), \ldots, u_s(x))$.

Теорема. Пусть функции $F(u)$ и $u(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-ой производной сложной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место формула:

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+...=n} F^{(k_1+k_2+k_3+...)}(u) \cdot P_{k_1+k_2+k_3+...},$$

$$P_{k_1+k_2+k_3+...} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\dots} \left(\frac{u^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{u^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \left(\frac{u^{(3)}(x)}{3!}\right)^{k_3} \dots,$$

где сумирование берется по всем целым неотрицательным числам $k_1, k_2, k_3, ...$, которые удовлетворяют диофантову уравнению $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... = n$, а $F^{(m)}$, $u^{(m)}$ являются производными m-го порядка для функций $F(u)$, $u(x)$.

Формула Фаа Ди Бруно может быть записана в комбинаторной форме:

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема n раз в точке t_0, а функция $y = f(x)$ дифференцируема n раз в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $y = h(t) = f(\varphi(t))$ дифференцируема n раз в точке t_0, причем

$$h^{(n)}(t_0) = \sum_{\pi\in\Pi} f^{(|\pi|)}(x_0) \prod_{B\in\pi} \varphi^{(|B|)}(t_0),$$

где Π — множество разбиений $\{1, 2, ..., n\}$, B пробегает все части разбиения π, а $|\pi|$, $|B|$ — число элементов в π, B.

Далее рассмотрим формулу, которая дает явное выражение для n-й полной производной составной функции, когда аргумент представляет собой вектор с произвольным числом компонентов. Формула Фаа ди Бруно как выражение для n-й производной сложной функции со скалярным аргументом - его частный случай.

`Теорема.` Пусть $G(x) = F(\overline{u}(x))$, $\overline{u}(x) = (u_1(x), ..., u_s(x))$ — сложная функция и существуют все её частные производные до n-го порядка, а функции $u_1(x)$, ..., $u_s(x)$ имеют все производные до n-го порядка. Тогда для n-го дифференциала сложной функции $G(x)$ имеет место формула:

$$d^n G(x) = \sum_{n} \sum_{k_1} \sum_{k_2} ... \sum_{k_n} \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} (i!)^{k_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{n} \prod\limits_{j=1}^{s} a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F(\overline{u})}{\partial u_1^{p_1}\ \partial u_2^{p_2}\ ...\ \partial u_s^{p_s}} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}} ... \left(u_s^{(i)}\right)^{a_{is}}.$$

Суммирование в теореме ведется по целочисленным решениям следующих диофантовых уравнений:

$$\sum_{n} : \; k_1 + 2k_2 + ... + nk_n = n,$$

$$\sum_{k_1} : \; a_{11} + a_{12} + ... + a_{1s} = k_1,$$

$$\sum_{k_2} : \; a_{21} + a_{22} + ... + a_{2s} = k_2,$$

$$...$$

$$\sum_{k_n} : \; a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{ns} = k_n,$$

$d = \partial/\partial x$ — дифференциальный оператор,
k — порядок промежуточной производной,
p_j — порядок частной производной по u_j.
Параметры k, k_j, p_j, a_{ij} связаны соотношениями:

$$p_j = a_{1j} + a_{2j} + ... + a_{nj}, \quad j = \overline{1, s},$$

$$k = p_1 + p_2 + ... + p_s = k_1 + k_2 + ... + k_n.$$

ПРИМЕР. $F(u_1(x), u_2(x)) = e^{u_1(x)\cdot u_2(x)}$. Найти $F^{(3)}$.

$$F^{(3)}(u_1, u_2) = \sum_3 \sum_{k_1} \sum_{k_2} \sum_{k_3} \frac{6}{\prod\limits_{i=1}^{3}(i!)^{k_i} \cdot \prod\limits_{i=1}^{3}\prod\limits_{j=1}^{2} a_{ij}!} \cdot \frac{\partial^k F}{\partial u_1^{p_1}\ \partial u_2^{p_2}} \prod_{i=1}^{3} \left(u_1^{(i)}\right)^{a_{i1}} \left(u_2^{(i)}\right)^{a_{i2}},$$

$$\sum_3 : k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 3,\ \sum_{k_1} : a_{11} + a_{12} = k_1,\ \sum_{k_2} : a_{21} + a_{22} = k_2,\ \sum_{k_3} : a_{31} + a_{32} = k_3,$$

$$p_1 = a_{11} + a_{21} + a_{31}, \qquad p_2 = a_{12} + a_{22} + a_{32}, \qquad p_1 + p_2 = k = k_1 + k_2 + k_3.$$

Подставим значения параметров:

$$F^{(3)}(u_1, u_2) = e^{u_1 u_2} \cdot [u_2^3 \left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3\left(2u_2 + u_1 u_2^2\right) \left(u_1^{(1)}\right)^2 u_2^{(1)} + 3\left(2u_1 + u_1^2 u_2\right) u_1^{(1)} \left(u_2^{(1)}\right)^2 +$$

$$+ u_1^3 \left(u_2^{(1)}\right)^3 + 3u_2^2 u_1^{(1)} u_1^{(2)} + 3(1 + u_1 u_2)(u_1^{(1)} u_2^{(2)} + u_1^{(2)} u_2^{(1)}) + u_2 u_1^{(3)} + u_1 u_2^{(3)}].$$

Литература.

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2003. 640 с.

2. Mishkov R. Generalization of the formula of Faa di Bruno for a composite function with vector argument // Internat. J.Math. 2000. 24(7). P. 481–491.

3. Roman S. The formula of Faa di Bruno // Amer. Math. Monthly. 87 (1980), no. 10. P. 805–809.

4. Bell E.T. Partition polynomials // Ann. Math. 29 (1927). P. 38–46.

5. Comtet L. Advanced Combinatorics. — D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974.

6. Шабат А.Б., Эфендиев М.Х. О приложениях формулы Фаа-Ди-Бруно // Уфимский математический журнал. Том 9. № 3 (2017). С. 132-137.

7. Дворянинов С.В., Сильванович М.И. О формуле Фаа ди Бруно для производных сложной функции // Матем. обр., 2009, выпуск 1(49), 22–26

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!